AULA Nº 1 – UMA IDENTIDADE ALGÉBRICA ESPECIAL

PROF. JOSÉ MARIA

O objetivo desta aula é mostrar a grande importância da identidade $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$ e suas diversas aplicações em inúmeros problemas de olimpíada. Vamos inicialmente demonstrá-la e posteriormente colocaremos alguns problemas para discussão.

Demonstração (1):

Inicialmente devemos lembrar que:

i) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ cubo perfeito

e ii) $a^3 + b^3 = (a + b) . (a^2 - ab + b^2)$

agora, podemos iniciar a demonstração

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

Vamos adicionar

$3a^2b + 3ab^2 - 3a^2b - 3ab^2$

$$\underbrace{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}_{\text{cubo perfeito}} + c^3 - 3a^2b - 3ab^2 - 3abc$$

$(a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c)$

aplicando ii) seque que:

$$(a+b+c) . \left[(a+b)^2 - c(a+b) + c^2\right] - 3ab\,(a+b+c)$$

$$(a+b+c) . \left[a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - ac - bc\right] - 3ab\,(a+b+c)$$

$$(a+b+c) . \left[a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc\right] \qquad \text{cqd}$$

Note que a Expressão

$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$ pode ser alterada para a forma

$$\frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$$

Com efeito, observe que:

Podemos reescrever $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$ desta forma:

$$\frac{1}{2}.\left[2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac\right]$$

$$\frac{1}{2}.\left[\underbrace{a^2 - 2ab + b^2}_{\text{q. perfeito}} + \underbrace{b^2 - 2bc - c^2}_{\text{q. perfeito}} + \underbrace{c^2 - 2ac + a^2}_{\text{q. perfeito}}\right]$$

Segue que:

$$\frac{1}{2}.\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$$

Finalmente

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}.(a+b+c)\ .\ \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2\right]$$

Demonstração (2):

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

Vamos definir o polinômio p(x) cujas raízes são a, b e c.

$p(x) = x^3 - (a + b + c)\,x^2 + (ab + bc + ac)\,x - abc$

a, b e c satisfazem a equação p(x) = 0, assim obtemos:

$a^3 - (a + b + c)a^2 + (ab + bc + ac)\ .\ a - abc = 0$

$b^3 - (a + b + c)b^2 + (ab + bc + ac)\ .\ b - abc = 0$

$c^3 - (a + b + c)c^2 + (ab + bc + ac)\ .\ c - abc = 0$

Adicionando as 3 equações temos:

$a^3 + b^3 + c^3 - (a + b + c)\ .\ (a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ac)\ .\ (a + b + c) - 3abc = 0$

Logo,

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)\ .\ (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$

Note que se $a + b + c = 0$

Então $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1. Qual o valor de $\frac{4011^3 - 2006^3 - 2005^3}{(4011).(2006).(2005)}$?

   SOLUÇÃO:

   Se $a + b + c = 0$ então $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ daí, temos:

   $a = 4011$; $b = -2006$ $c = -2005$ seque que:

   $a + b + c = 4011 - 2006 - 2005 = 0$

   Podemos aplicar a expressão acima fazendo as substituições:

   $4011^3 - 2006^3 - 2005^3 = 4011^3 + (-2006)^3 + (-2005)^3 =$

   $3\ .\ (4011)\ .\ (-2006)\ .\ (2005)$

   Portanto:

   $$\frac{4011^3 - 2006^3 - 2005^3}{(4011).(2006).(2005)} = \frac{3.(4011).(-2006).(-2005)}{(4011).(2006).(2005)} = 3$$

2. Se x, y e z são números inteiros e $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = x \cdot y \cdot z$ prove que $x^3 + y^3 + z^3$ é divisível por $x + y + z + 6$

SOLUÇÃO:

De imediato, temos:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z).[\underbrace{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}_{x\,.\,y\,.\,z}]$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z).\ xyz$$

Segue que:

$$x^3 + y^3 + z^3 = \frac{x.y.z}{2}.\ (x + y + z) + 3xy$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = \frac{(xyz\,(x + y + z) + 6xy)}{2}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = \frac{xyz}{2}.(x + y + z + 6)$$

Como $\frac{x.y.z}{2}$ é inteiro. Logo, $x^3+y^3+z^3$ é divisível por (x + y + z + 6)

PROBLEMAS PROPOSTOS

1) Sejam a, b e c números reais positivos tais que:

$$\mathrm{Log}_a^b + \mathrm{Log}_a^c + \mathrm{Log}_c^a = 0$$

Determine o valor de

$$\left(\mathrm{Log}_a^b\right)^3 + (\mathrm{Log}_a^c)^3 + (\mathrm{Log}_c^a)^3$$

2) (OBM-06) Sejam x, y, z números reais não nulos tais que x + y + z = 0.

O valor de $(x^2 + y^2 + z^2).\left(\frac{1}{x^3y^3} + \frac{1}{x^3z^3} + \frac{1}{y^3z^3}\right)$ é:

a) 0 b) 1 c) 3 d) 4

3) Fatore $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$

4) Prove que $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ é um número racional.

5) Fatore $(a+2ab-3c)^3+(b+2c-3ac)^3+(c+2a-3b)^3$

6) (Reino Unido-2008) Encontre o valor mínino de $x^2 + y^2 + z^2$, onde x, y e z são números e $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$.

7) Se “R” é um número real e $\sqrt[3]{R}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{R}}=3$ Determine o valor de $R^3+\dfrac{1}{R^3}$

8) Prove que o número $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ é um número racional.

9) Verifique se $(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(x+z-y)^3=24xyz$

10) Se a, b e c são números reais distintos prove que a equação não tem solução $\sqrt[3]{a-b}+\sqrt[3]{b-c}+\sqrt[3]{c-a}=0$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A expressão $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ pode ser demonstrada de mais duas maneiras: uma é através de polinômios simétricos e a outra através de determinante. Para eventuais consultas acerca dessas demonstrações, ver o artigo do Prof. Carlos Gomes (Eureka 25 pág. 45), Revista do Professor de Matemática (RPM 41, pág. 38).