Soluções dos problemas propostos da

AULA 1- UMA IDENTIDADE ALGÉBRICA ESPECIAL

1) Utilizando a identidade
$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$,
Para $x=\log_a b$, $y=\log_b c$ e $z=\log_c a$ temos por hipótese $x+y+z=0$ daí $x^3+y^3+z^3-3xyz=0 \Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz$. O enunciado pede exatamente o valor de $x^3+y^3+z^3$, ou seja,
$3xyz=3\cdot\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=$

$$3\cdot\frac{\log b}{\log a}\cdot\frac{\log c}{\log b}\cdot\frac{\log a}{\log c}=3.$$

2) Da mesma forma se $x+y+z=0$ então $x^3+y^3+z^3=3xyz$, logo
$$\frac{1}{x^3y^3}+\frac{1}{y^3z^3}+\frac{1}{y^3z^3}=\frac{x^3+y^3+z^3}{x^3y^3z^3}=\frac{3xyz}{x^3y^3z^3}=\frac{3}{x^2y^2z^2}$$
$$\Rightarrow(x^2y^2z^2)\left(\frac{1}{x^3y^3}+\frac{1}{y^3z^3}+\frac{1}{y^3z^3}\right)=3,$$

Resposta: Alternativa C

3) Como $(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$, temos
$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$.

4) Suponhamos que $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$
Utilizando a identidade $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ obtemos
$x^3=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})+3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}x\Rightarrow x^3=4+3\sqrt[3]{-1}x\Rightarrow$
$x^3+3x-4=0$. Claramente essa equação admite 1 como raiz, logo admite o fator $(x-1)$, isto é,
$$x^3+3x-4=(x-1)(x^2+x+4)$$

Como o segundo fator não possui raízes reais e x é um número real, concluímos que $x=1$ e portanto, x é racional.

5) Temos $(a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3=$
$$3(a+2b-3c)(b+2c-3a)(c+2a-3b)$$
Já que $(a+2b-3c)+(b+2c-3a)+(c+2a-3b)=0$.

6) Utilizando a identidade vem $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=1$, fezendo $a=x^2+y^2+z^2$ e $b=x+y+z$. Primeiramente note que $b>0$, pois $b=$

$$\frac{1}{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}$$

$$e\;\; x^2+y^2+z^2>xy-yz-zx\,.$$

Agora, $b\left(a-\frac{b^2-a}{2}\right)$, pois $\frac{b^2-a}{2}=xy+yz+zx$. Simplificando vem,

$$3a=\frac{2}{b}+b^2=\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+b^2\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b}\cdot b^2}=3$$

Donde usamos a desigualdade das médias.
Assim $a\geq 1$, e o valor mínimo de a é 1. Por exemplo, esse valor é atingido quando $x=0, y=0\; e\; z=1$.

7) Utilizando a identidade $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ obtemos,

$$\left(\sqrt[3]{R}+\frac{1}{\sqrt[3]{R}}\right)^3=3^3\Rightarrow R+\frac{1}{R}+3\cdot\sqrt[3]{R}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{R}}\left(\sqrt[3]{R}+\frac{1}{\sqrt[3]{R}}\right)=27\Rightarrow R+\frac{1}{R}=18,$$

Novamente,

$$\left(R+\frac{1}{R}\right)^3=18^3\Rightarrow R^3+\frac{1}{R^3}+3\cdot\frac{1}{R}\cdot R\left(R+\frac{1}{R}\right)=5832\Rightarrow R^3+\frac{1}{R^3}=5778.$$

8) Suponhamos que $x=\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$
Utilizando a identidade $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ obtemos

$$x^3=\left(45+29\sqrt{2}\right)+\left(45-29\sqrt{2}\right)+3\sqrt[3]{\left(45+29\sqrt{2}\right)\left(45-29\sqrt{2}\right)}x\Rightarrow x^3$$
$$=90+3\sqrt[3]{-343}x\Rightarrow x^3+21x-90=0$$

Claramente essa equação admite 3 como raiz, logo admite o fator $(x-3)$, isto é,

$$x^3+21x-90=(x-3)(x^2+3x+90)$$

Como o segundo fator não possui raízes reais(o discriminante é negativo) e x é um número real, concluímos que $x=3$ e portanto, x é racional.

9) Devemos provar que
$(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(x+z-y)^3-(x+y-z)^3=24xyz.$
Observe que

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3-(x+y-z)^3 &= (x+y+z-x-y+z)((x+y+z)^2 \\ &+ (x+y+z)(x+y-z)+(x+y-z)^2) \\ &= 2z(3x^2+3y^2+z^2+6xy).\end{aligned}$$

Analogamente,

$-(y+z-x)^3-(x+z-y)^3 = -((y+z-x)^3+(x+z-y)^3) =$
$-2z(3x^2+3y^2+z^2-6xy)$. Portanto somando ambas, vem:

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3-(x+y-z)^3-(y+z-x)^3-(x+z-y)^3 &= 2z(3x^2+3y^2+z^2+6xy-3x^2-3y^2-z^2+6xy) \\ &= 24xyz.\end{aligned}$$

$Obs.$: Há também uma solução (claro!) que utiliza a identidade do artigo.

10) Vamos utilizar a identidade

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx),$$

Façamos

$$x=\sqrt[3]{a-b}\,, y=\sqrt[3]{b-c}\ \ e\ \sqrt[3]{c-a}$$

E agora vamos argumentar por absurdo, isto é, suponhamos o contrário(que a equação tem solução), por hipótese, $x+y+z=0$ então $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

Entretanto,

$$0=(a-b)+(b-c)+(c-a)=3\sqrt[3]{a-b}\cdot\sqrt[3]{b-c}\cdot\sqrt[3]{c-a}\neq 0$$

Já que a, b, c são distintos. Portanto a equação não possui solução.

Gostaria de agradecer o Prof. José Maria, pelo artigo.

Ao meu professor Carlos A. Gomes pela referência (polinômios simétricos) e pelas aulas da UFRN.

Finalmente, ao meu professor Benedito Tadeu, que há tantos anos se dedica às olimpíadas do RN e pelas aulas da UFRN.

PEDRO PANTOJA, ALUNO DE MATÉMATICA UFRN.