OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

AULA N$^{\underline{o}}$ 02 – 2010

UMA DESIGUALDADE MUITO ÚTIL: A DE CAUCHY–SCHWARTZ

Benedito Tadeu V. Freire e José Maria Gomes

1. Introdução

O objetivo desta aula é mostrar, de forma sucinta, uma ferramenta muito poderosa, a Desigualdade de Cauchy-Schwartz, muito útil na prova de desigualdades que aparecem com freqüência em Olimpíadas de Matemática. Depois de apresentarmos a demonstração da Desigualdade de Cauchy-Schwartz, faremos três aplicações, resolvendo os seguintes problemas, dois deles de Olimpíadas de Matemática:

Problema (1)

Se a, b e c são números reais tais que

$a^2+b^2+c^2=1$, então qual é o valor máximo de $ab+bc+ac$?

Problema (2) (África do Sul-95)

Se **a, b, c** e **d** números reais positivos, prove que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}$$

Problema (3) (Cone Sul-96)

Se **a, b,** e **c** são números reais positivos, prove que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

No final da Aula, deixamos para o leitor exercitar uma coleção de problemas em cuja solução faz uso dos argumentos aqui estudados.

Vamos fazer a demonstração da Desigualdade de Cauchy-Schwartz provando, inicialmente, o lema a seguir:

Lema

Se a, b, x, y são números reais quaisquer, com x e y positivos, então segue que:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}$$

Demonstração

A demonstração é feita a partir de manipulações algébricas bem simples. Trabalhamos com a desigualdade proposta até chegarmos a um fato verdadeiro bem conhecido, o que nos garante a veracidade da desigualdade, pois, começando com este fato conhecido, fazendo todas as operações inversas, chegaremos a desigualdade que queremos provar.

Assim, como x e y são positivos, multiplicamos ambos os lados da desigualdade que queremos provar por xy(x+y), obtendo $a^2y(x+y)+b^2x(x+y)\geq(a+b)^2xy$, que é o mesmo que

$$a^2y\cdot x+a^2y^2+b^2x^2+b^2y\geq a^2xy+2abxy+b^2xy$$

Agora, fazendo os cancelamentos, obtemos: $a^2y^2-2abxy+b^2x^2\geq 0$, que é o mesmo que $(ay-bx)^2\geq 0$ *(que é o nosso fato verdadeiro conhecido*!). É fácil ver que, a igualdade ocorre quando $ay=bx$, que é o mesmo que $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$. Assim, concluímos a prova do nosso lema. □

É interessante observar que podemos estender a desigualdade a um terno de números nas condições do lema:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Na verdade, por um simples argumento indutivo, podemos mostrar que a desigualdade vale para n números. Isto é,

$$\frac{{a_1}^2}{x_1}+\frac{{a_2}^2}{x_2}+\cdots+\frac{{a_n}^2}{x_n}\geq\frac{(a_1+a_2+a_3+\ldots a_n)^2}{x_1+x_2+\ \ldots\ x_n}$$

E, de modo análogo ao observado acima, para todo numero real $a_1,a_2,\ldots a_n$ e $x_1, x_2, \ldots x_n > 0$, a igualdade ocorre somente com :

$$\frac{a_1}{x_1}=\frac{a_2}{x_2}=\cdots=\frac{a_n}{x_n}$$

2. A Desigualdade de Cauchy–Schwartz

Se $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots b_n$ são números reais. Segue que:

$$({a_1}^2+{a_2}^2+\ \ldots\ {a_n}^2)\ .\ ({b_1}^2+{b_2}^2+\ \ldots\ {b_n}^2)\geq(a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\ldots a_n\cdot b_n)^2$$

A igualdade ocorre se e somente se:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

Demonstração 1:

Faremos uma demonstração bem conhecida na literatura, que usa as propriedades da função quadrática. Considere a função:

$$f(x) = (a_1 - b_1.x)^2 + (a_2 - b_2.x)^2 + (a_2 - b_3.x)^2 + \ldots + (a_n - b_n x)^2$$

É fácil ver que $f(x) \geq 0$, para todo **x** real, pois f(x) é uma soma de quadrados. Logo, o discriminante "Δ" ≤ 0.

Para concluirmos a prova, vamos reescrever a função de modo conveniente:

$$f(x) = a_1 - 2a_1 b_1 x + b^2 x^2 + a^2 - 2a_2 b_2 x + b_2^2 x^2 + \ldots + a_n^2 - 2ab_n x + b_n^2 x^2$$

$$f(x) = (b_1^2 + b_2^2 + \ldots b_n^2) x^2 - (2a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + \ldots + 2a_n b_n) x + a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2$$

Agora, calculando o discriminante da função quadrática $\Delta = b^2 - 4ac$, temos

$$\Delta = 4(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ \ldots \ a_n b_n)^2 - 4.(a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2) \ . \ (b_1^1 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \leq 0$$

Segue que:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ \ldots \ a_n b_n)^2 \ \leq \ (a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2) \ . \ (b_1^1 + b_2^2 + \ldots + b_n^2),$$

O que conclui a demonstração.

Observe que a igualdade ocorre quando $\Delta = 0$, o que implica que:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ \ldots \ \frac{a_n}{b_n}$$

Demonstração 2 (Argumento fulminante!**)**

Vamos usar nosso lema. Comecemos pela expressão: $a_1^2 + a_2^2 + \ \ldots \ a_n^2$

Agora observe que: $a_1^2 + a_2^2 + \ \ldots \ a_n^2 = \dfrac{a_1^2 \ . \ b_1^2}{b_1^2} + \dfrac{a_2^2 \ . \ b_2^2}{b_2^2} + \ \ldots \ + \dfrac{a_n^2 \ . \ b_n^2}{b_n^2}$

Aplicando o nosso lema poderoso, para o caso de n números, obtemos:

$$a_1^2 + a_2^2 + \ \ldots \ a_n^2 = \frac{a_1^2 \ b_1^2}{b_1^2} + \frac{a_2^2 \ b_2^2}{b_2^2} + \ \ldots \ + \frac{a_n^2 \ b_n^2}{b_n^2} \geq \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2}{b_1^2 + b_2^2 + \ldots b_n^2}$$

O que nos dá, de forma bem simples, a Desigualdade de Cauchy-Schwartz:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ \ldots \ a_n^2) \ . \ (b_1^2 + b_2^2 + \ \ldots \ b_n^2) \ \geq (a_1 \ . \ b_1 + a_2 \ . \ b_2 + \ \ldots \ a_n b_n)^2$$

Veja que foi espetacular a conclusão!!!

Para finalizar, vamos usar a desigualdade de Cauchy–Schwartz para provar o lema inicial.

Considere a expressão $(a + b)^2$

Vamos reescrevê-la de modo a utilizar Cauchy–Schwartz:

$$(a+b)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{x}} . \sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{y}} . \sqrt{y} \right)^2 \leq \left(\frac{a^2}{(\sqrt{x})^2} + \frac{b^2}{(\sqrt{y})^2} \right)^2 . (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2$$

daí, segue que:

$$(a+b)^2 \leq \left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \right) . (x+y)$$

Logo, $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$

A matemática nos leva a caminhos inimagináveis, e nos faz sentir fortes emoções!!!..........

A seguir, vamos resolver os dois problemas apresentados no início da Aula.

3. Problemas Resolvidos

Problema (1)

Se *a, b* e *c* são números reais tais que

$a^2 + b^2 + c^2 = 1$, então qual é o valor máximo de *ab + bc + ac?*

Solução

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, aplicada as ternas ordenadas de números reais (*a, b, a)* e (*b, c, c)* temos que

$\left(ab+bc+ac\right)^2 \leq (a^2+b^2+a^2)(b^2+c^2+c^2)$. Por outro lado, como

$a^2+b^2+c^2=1$, segue que $a^2+b^2=1-c^2$. Logo, $a^2+b^2+a^2=1-c^2+a^2$. De modo análogo, temos que $b^2+c^2+c^2=1-a^2+c^2$. Portanto,

$\left(ab+bc+ac\right)^2 \leq (a^2+b^2+a^2)(b^2+c^2+c^2) = (1-c^2+a^2).(1-a^2+c^2)$. Agora, tomando

$x=a^2-c^2$, temos que $\left(ab+bc+ac\right)^2 \leq (1-x)(1+x) = 1-x^2 \leq 1$. Portanto, o maior valor da expressão $ab + bc + ac$ é 1 e esse valor é atingido quando $a=b=c=\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Problema (2) (África do Sul-95)

Sejam **a, b, c** e **d** números reais positivos, prove

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}$$

Solução - 1

Usando o poderoso lema é imediato. Reescrevendo a expressão acima, temos

$$\frac{1^2}{a}+\frac{2^2}{b}+\frac{2^2}{c}+\frac{4^2}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}$$

Segue que

$$\frac{1^2}{a}+\frac{2^2}{b}+\frac{2^2}{c}+\frac{4^2}{d}\geq\frac{(1+1+2+4)^2}{a+b+c+d}=\frac{64}{a+b+c+d}$$

Esse lema é realmente muito legal $\frac{1^2}{a}+\frac{2^2}{b}+\frac{2^2}{c}+\frac{4^2}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}$

$$\frac{1^2}{a}+\frac{2^2}{b}+\frac{2^2}{c}+\frac{4^2}{d}\geq\frac{(1+1+2+4)^2}{a+b+c+d}=\frac{64}{a+b+c+d}$$

Solução – 2

Usando a Desigualdade de Cauchy–Schwartz, temos:

Segue que:

$$a_1=\frac{1}{\sqrt{a}};\ a_2=\frac{1}{\sqrt{b}};\ a_3=\frac{2}{\sqrt{c}}\ e\ a_4=\frac{4}{\sqrt{d}}$$

$$b_1=\sqrt{a};\ b_2=\sqrt{b};\ b_3=\sqrt{c}\ e\ b_4=\sqrt{d}$$

Aplicando Cauchy–Schwartz, temos

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)\,.\,(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)^2$$

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\right).\,(a+b+c+d)\geq\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\,.\,\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{b}}\,.\,\sqrt{b}+\frac{2}{\sqrt{c}}\,.\,\sqrt{c}+\frac{4}{\sqrt{d}}\,.\,\sqrt{d}\right)^2$$

Assim temos:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\right).\,(a+b+c+d)\geq\left(1+1+2+4\right)^2$$

Logo:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}$$

Problema (3) (Cone Sul-96)

Se **a, b,** e **c são** números reais. Prove que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

<u>Solução:</u>

Multiplicamos os três termos do lado esquerdo da desigualdade por $\frac{a}{a}$, $\frac{b}{b}$ e $\frac{c}{c}$,respectivamente, que é o mesmo que multiplicar por 1, e então usamos nosso poderoso lema:

$$\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ab}+\frac{c^2}{ac+bc}\geq\frac{3}{2}$$

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ac)}\geq\frac{3}{2}$$

A expressão acima é equivalente a:

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\geq 3ab+3bc+3ac$

$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$

$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$ a igualdade ocorre quando $a=b=c$.

Nota:

Podemos facilmente verificar que a desigualdade $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$ é verdadeira. Com efeito, temos:

$a^2+b^2\geq 2ab$, $b^2+c^2\geq 2bc$ e $c^2+a^2\geq 2ac$

Adicionando as três expressões acima temos:

$2a^2+2b^2+2c^2\geq 2(ab+bc+ac)$

O final é bem simples $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$, o que conclui a demonstração.

4. Problemas Propostos

1) Se x, y e z > 0 prove que $\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}\geq\frac{9}{x+y+z}$

2) Se a e b são números reais positivos, prove que $8(a^4+b^4)\geq(a+b)^4$

3) (República Tcheca-99) Para a, b e c números reais positivos, prove a desigualdade $\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\geq 1$

4) Se a, b, x e y são números reais positivos, prove que $\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}\geq\frac{3}{a+b}$

5) (Croácia-2004) Se x, y e z são números reais positivos, prove que

$$\frac{x^2}{(x+y).(x+z)}+\frac{y^2}{(y+z).\,(y+x)}+\frac{z^2}{(z+x).(z+y)}\geq \frac{3}{4}$$

6) Se a, b e c >0 prove que $\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{a^2+c^2}{a+c}\geq a+b+c$

7) Se a, b e c são números positivos tais que a.b.c = 1 prove que:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq \frac{3}{2}$$

8) Se x, y e z > 0 prove que $\frac{x}{x+2y+3z}+\frac{y}{y+2z+3x}+\frac{z}{z+2x+3y}\geq \frac{1}{2}$

9) Para todo a, b, c e d reais positivos prove que $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2$

10) (Moldávia-2007) Se w, x, y e z são números reais positivos prove que:

$$\frac{w}{x+2y+3z}+\frac{x}{y+2z+3w}+\frac{y}{z+2w+3x}+\frac{2}{w+2x+3y}\geq \frac{2}{3}$$