Carlos A. Gomes
Natal/RN

Como verificar que

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}+\ldots\ ?$$

Esta bela fórmula foi deduzida pela primeira vez em 1593 por ***François Viete*** usando as medidas das áreas de polígonos inscritos numa circunferência. A demonstração que mostro abaixo foi feita no século XVIII pelo fantástico matemático suíço ***Leonard Euler***, um homem que aprendia e produzia Matemática com a facilidade com que os homens normais como nós repiramos....veja que beleza!!!....

Sabemos que $sen(2\theta)=2sen\theta.\cos\theta$ o que implica que $sen(x)=2sen\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$. Mas podemos aplicar novamente a identidade $sen(2\theta)=2sen\theta.\cos\theta$ para $sen\left(\frac{x}{2}\right)$. Obtendo $sen\left(\frac{x}{2}\right)=2sen\left(\frac{x}{4}\right).\cos\left(\frac{x}{4}\right)$. Substituindo esse resultado na primeira expressão $sen(x)=2sen\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$, obtemos:

$$sen(x)=2\underbrace{sen\left(\frac{x}{2}\right)}_{2sen\left(\frac{x}{4}\right).\cos\left(\frac{x}{4}\right)}\cos\left(\frac{x}{2}\right)=2^2.sen\left(\frac{x}{4}\right).\cos\left(\frac{x}{4}\right).\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Repetindo este processo n vezes obtemos a seguinte identidade;

$$sen(x)=2^n.sen\left(\frac{x}{2^n}\right).\cos\left(\frac{x}{2^n}\right).\cos\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right).\ \ldots\ .\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

dividindo ambos os membros por x $(x\neq 0$, é claro!)obteremos:

$$\frac{sen(x)}{x}=\frac{2^n}{x}.sen\left(\frac{x}{2^n}\right).\cos\left(\frac{x}{2^n}\right).\cos\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right).\ \ldots\ .\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

que pode ser reescrito como:

$$\frac{sen(x)}{x}=\left[\frac{sen\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}\right].\cos\left(\frac{x}{2^n}\right).\cos\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right).\ \ldots\ .\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Fazendo o n tender a infinito temos que $\frac{x}{2^n} \to 0$ e portanto $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}\right] = 1$ (lembre que $\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right) = 1$).> assim temos que quando n tende ao infinito,

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \cos\left(\frac{x}{2}\right).\cos\left(\frac{x}{4}\right).\cos\left(\frac{x}{8}\right). \ldots$$

Substituindo x por $\frac{\pi}{2}$, obtemos:

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right).\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{4}\right).\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{8}\right). \ldots =$$

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{\pi}{8}\right).\cos\left(\frac{\pi}{16}\right). \ldots =$$

$$\frac{2}{\pi} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{\pi}{8}\right).\cos\left(\frac{\pi}{16}\right). \ldots$$

Mas ocorre que

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Agora lembrando que $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$ temos que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$$

. . . .

Como $\frac{2}{\pi} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{\pi}{8}\right).\cos\left(\frac{\pi}{16}\right). \ldots$ segue que:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}.\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} + \ldots$$

Que lindo hein????