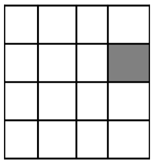
Olimpíada Brasileira de Matemática | Olimpíada de Matemática do Rio Grande do Norte | Sociedade Brasileira de Matemática | UFRN EXTENSÃO | PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

COLETÂNEA DE PROBLEMAS N$^{\underline{o}}$ 04– 2009 – Nível I

Problema 1

Considere o tabuleiro abaixo.



Quantos são os quadrados que não contém o quadrado hachurado?

Problema 2

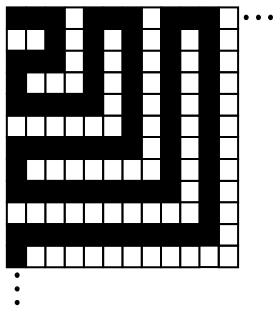
(OBMEP-2008) Fábio tem cinco camisas: uma preta de mangas curtas, uma preta de mangas compridas, uma azul, uma cinza e uma branca, e quatro calças: uma preta, uma azul, uma verde e uma marrom.
De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir com uma camisa e uma calça de cores distintas?

Problema 3

(OBMEP-2008) Ana e Beatriz compraram dezoito bombons de mesmo preço. Ana pagou por oito deles e Beatriz pelos outros dez. Na hora do lanche, dividiram os bombons com Cecília e cada uma delas comeu seis. Para dividir igualmente o custo dos bombons, Cecília deveria pagar R$ 1,80 para Ana e Beatriz. Ela pensou em dar R$ 0,80 para Ana e R$ 1,00 para Beatriz, mas percebeu que essa divisão estava errada.
Quanto ela deve pagar para Beatriz?

Problema 4

(OBM-2007) Parte das casas de um quadriculado com o mesmo número de linhas (fileiras horizontais) e colunas (fileiras verticais) é pintada de preto, obedecendo ao padrão apresentado pelo desenho ao lado.



a) Quantas casas serão pintadas num quadriculado com 14 linhas e 14 colunas, de acordo com esse padrão?
b) Quantas linhas tem um quadriculado com 199 casas pintadas?

Problema 5

Vamos chamar de *garboso* o número que possui um múltiplo cujas quatro primeiras casas de sua representação decimal são 2008. Por exemplo, 7 é garboso pois 200858 é múltiplo de 7 e começa com 2008. Observe que $200858 = 28694 \times 7$.
a) Mostre que 17 é garboso.
b) Mostre que todos os inteiros positivos são garbosos.

COLETÂNEA DE PROBLEMAS N$^{\underline{o}}$ 03– 2009 – Nível II

Problema 1

Numa escola, 1000 bilhetes, numerados de 000 a 999, foram vendidos para um sorteio. Os bilhetes vencedores tem seus respectivos números com os dígitos em ordem crescente. Todos os outros bilhetes são perdedores. Por exemplo, 057 e 569 são vencedores, mas 083 e 299 são perdedores.

(a) Quantos são os bilhetes vencedores?

(b) Cada bilhete custa R$ 1,00. Por cada bilhete vencedor o jogador ganha R$ 8,00.

Se um jogador decide comprar todos os 1000 bilhetes, quanto ele ganhará ou perderá?

Problema 2

(OBM-2007) Sendo $f(x) = 100x + 3$, calcule o valor de $\dfrac{f(10^{-8}) - f(10^{3})}{10^{-8} - 10^{3}} - f(-1)$.

Problema 3

(OBM-2008) Dado um número natural *N*, multiplicamos todos os seus algarismos. Repetimos o processo com o número obtido até obtermos um número com um algarismo. Este número será chamado de *primitivo* de *N*. Por exemplo, como $3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$ e $4 \cdot 2 = 8$, concluímos que o *primitivo* de 327 é 8.

Calcule a soma dos algarismos do maior número natural com todos os algarismos diferentes cujo *primitivo* é ímpar.

Problema 4

(OBM-2008) Seja *ABC* um triângulo acutângulo com *BC* = 5. Seja *E* o pé da altura relativa ao lado *AC* e *F* o ponto médio do lado *AB*.

Se *BE* = *CF* = 4, calcule a área do triângulo *ABC*.

Problema 5

(OBM-2008) No quadro negro são escritos os números $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, ..., 2008^2$. Pedro e Igor jogam um jogo onde eles apagam alternadamente um número por vez até sobrarem apenas dois números. Se a diferença entre estes dois números for múltiplo de 2009, Igor vence. Caso contrário, quem vence é Pedro.

Sabendo que Pedro é o primeiro a jogar, diga quem possui a estratégia vencedora. Justifique sua resposta.

COLETÂNEA DE PROBLEMAS N$^{\underline{O}}$ 03– 2009 – Nível III

Problema 1
Existem quantos números naturais de cinco dígitos tais que depois de apagar um dos dígitos o número resultante de quatro dígitos seja divisível por 7?

Problema 2
Numa reta horizontal, marcam-se 2009 pontos, cada um deles ou é branco ou é preto. Para todo ponto marcado na reta, achamos a soma das quantidades dos pontos brancos à sua direta mais a quantidade dos pontos pretos à sua esquerda. Dentre todas as 2009 somas possíveis, exatamente uma ocorre um número ímpar de vezes.

Encontre todos os possíveis valores desta soma.

Problema 3
Quantos são os subconjuntos do conjunto $\{1, 2, 3, ..., 29, 30\}$ com a propriedade de que a soma de seus elementos seja maior do que 232?

Problema 4
Seja K = *abc* um número inteiro positivo de três dígitos, escrito na base 10, de modo que seja possível desenhar um triângulo isósceles (incluindo os triângulos equiláteros) com lados de comprimentoa *a, b* e *c*, respectivamente.

Encontre a quantidade de tais inteiros não negativos K.

Problema 5
Sejam A e B dois conjuntos de números reais:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_{100}\} \text{ e } B = \{b_1, b_2, b_3, ..., b_{50}\}$$

Quantas são as aplicações $f : A \longrightarrow B$ tal que todo elemento de B possui uma imagem inversa e, além disso, $f(a_1) \le f(a_2) \le f(a_3) \le ...... \le f(a_{100})$?

Problema 6
Um mágico quer fazer o seguinte truque. Pede a presença de um voluntário da audiência cuja idade é n anos. No quadro-negro, o mágico escreve em linha reta n inteiros positivos. Depois, no espaço entre dois números consecutivos quaisquer, o mágico pede para o voluntário escrever a diferença entre os inversos dos números à esquerda e à direita deste espaço. O voluntário fica surpreso ao encontrar ***todas*** as citadas diferenças iguias.

Explique como o mágico consegue fazer o truque.