Olimpíada Brasileira de Matemática	Olimpíada de Matemática do Rio Grande do Norte	Sociedade Brasileira de Matemática	UFRN EXTENSÃO	PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

COLETÂNEA DE PROBLEMAS Nº 02– 2009 – Nível I

Problema 1

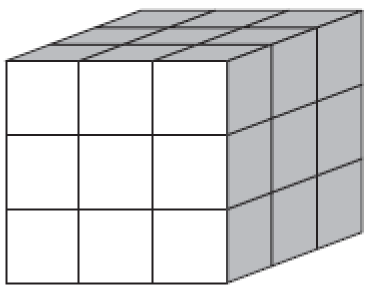
Você tem oito moedas de um real. Uma delas é “defeituosa”, pesa mais do que as outras. Você dispõe de uma balança de dois pratos.
Como descobrir qual é a moeda mais pesada com apenas duas pesagens?

Problema 2

Um garoto brinca na praia com um balde com capacidade para 3 litros e um balde com capacidade para 5 litros.
Como o garoto deve proceder para separar, exatamente, 4 litros de água?

Problema 3

(OBMEP-2008) Xaveco está brincando de montar cubos grandes usando cubinhos menores, todos brancos e de mesmo tamanho.
(a) Primeiro ele montou um cubo com 27 cubinhos e pintou de cinza duas faces vizinhas desse cubo, como na figura a seguir.



Quantos cubinhos ficaram sem nenhuma face pintada de cinza?

(b) A seguir, ele montou outro cubo com 27 cubinhos, mas dessa vez pintou de cinza duas faces opostas desse cubo.
Quantos cubinhos ficaram sem nenhuma face pintada de cinza?

(c) Depois ele montou um cubo com 64 cubinhos e pintou de cinza três faces desse cubo.
Quais são os possíveis números de cubinhos que ficaram sem nenhuma face pintada de cinza?

(d) Para terminar, Xaveco montou mais um cubo e pintou de cinza algumas de suas faces, de modo que 96 cubinhos ficaram sem nenhuma face pintada.

Quantos cubinhos ele usou e quantas faces do cubo maior ele pintou?

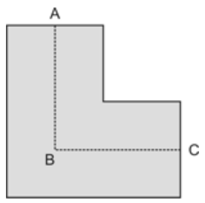
Problema 4
(OBM-2008) Com o dinheiro que Carlinhos tinha, poderia ter comprado 600 gramas de queijo ou 400 gramas de presunto. Usando esse dinheiro, ele resolveu comprar quantidades iguais de presunto e queijo.
Quantos gramas de cada item ele comprou?

Problema 5
(OBM-2008) A partir das igualdades

$$3^2 - 1^2 = 8 = 8 \cdot 1,$$
$$5^2 - 3^2 = 16 = 8 \cdot 2,$$
$$7^2 - 5^2 = 24 = 8 \cdot 3,$$
$$\ldots$$
$$\text{e } 2009^2 - 2007^2 = 8 \cdot \text{N},$$

podemos escrever $2009^2 - 1 = 4 \cdot \text{N} \cdot (\text{N} + 1)$.
Qual é o valor de N?

Problema 6
(OBM-2008) A piscina do clube que Esmeralda freqüenta tem a forma de um hexágono (polígono com seis lados), com um ângulo interno de 270º, os demais ângulos de 90º e os quatro lados menores com 12 metros cada. Esmeralda costuma nadar pelo meio da piscina, a partir do ponto A, descrevendo o trajeto representado, na figura a seguir, pelo ângulo reto ABC, em que AB = BC.



Certo dia, ela nadou por esse trajeto 4 vezes, isto é, foi e voltou 2 vezes.
Quantos metros ela percorreu?

COLETÂNEA DE PROBLEMAS N$^{\underline{O}}$ 02 – 2009 – Nível II

Problema 01
Quatro pessoas tem de atravessar à noite uma passarela bamba. Há muitos buracos na passarela, que suporta apenas duas pessoas de cada vez (mais do isso ela cai). O grupo deve usar uma lanterna para guiar seus passos; caso contrário, acabará caindo num dos buracos e morrendo. Só há uma lanterna. As quatro pessoas andam em velocidades diferentes. Adam consegue cruzar a passarela em um minuto; Larry, em dois minutos; Edge leva cinco minutos; e o mais lento, Bono, precisa de dez minutos. A passarela vai ruir em dezessete minutos.
Como os quatro podem atravessá-la?

Problema 2
Você tem cinco sacos de moedas, cada um contendo cinquenta moedas. Todas as moedas de um único saco são "defeituosas", cada uma delas pesa uma grama menos que as normais. Você recebe uma balança com escala (balança com um único prato) e só pode fazer uma pesagem.
Como descobrir qual o saco das moedas "defeituosas"?

Problema 3
(OBMEP-2008) Um conjunto de inteiros consecutivos é *equilibrado* se ele pode ser dividido em dois subconjuntos com mesmo número de elementos, de modo que:

1) os dois subconjuntos não tenham elementos em comum;
2) a soma dos elementos de um dos conjuntos seja igual à soma dos elementos do outro;
3) a soma dos quadrados dos elementos de um dos subconjuntos seja igual à soma dos elementos do outro.

Por exemplo, o conjunto {7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14} é equilibrado, pois podemos dividi-lo nos subconjuntos {7, 10, 12, 13,} e {8, 9, 11, 14} e

$$7 + 10 + 12 + 13 = 8 + 9 + 11 + 14$$
$$7^2 + 10^2 + 12^2 + 13^2 = 8^2 + 9^2 + 11^2 + 14^2$$

(a) Verifique que o conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} é equilibrado.
(b) Mostre que qualquer conjunto de oito inteiros consecutivos é equilibrado.
(c) Mostre que nenhum conjunto de quatro inteiros consecutivos é equilibrado.

Problema 4
(OBM-2008) Encontre todos os triângulos retângulos, de lados com medidas inteiras, nos quais a área tem valor numérico igual ao do perímetro.

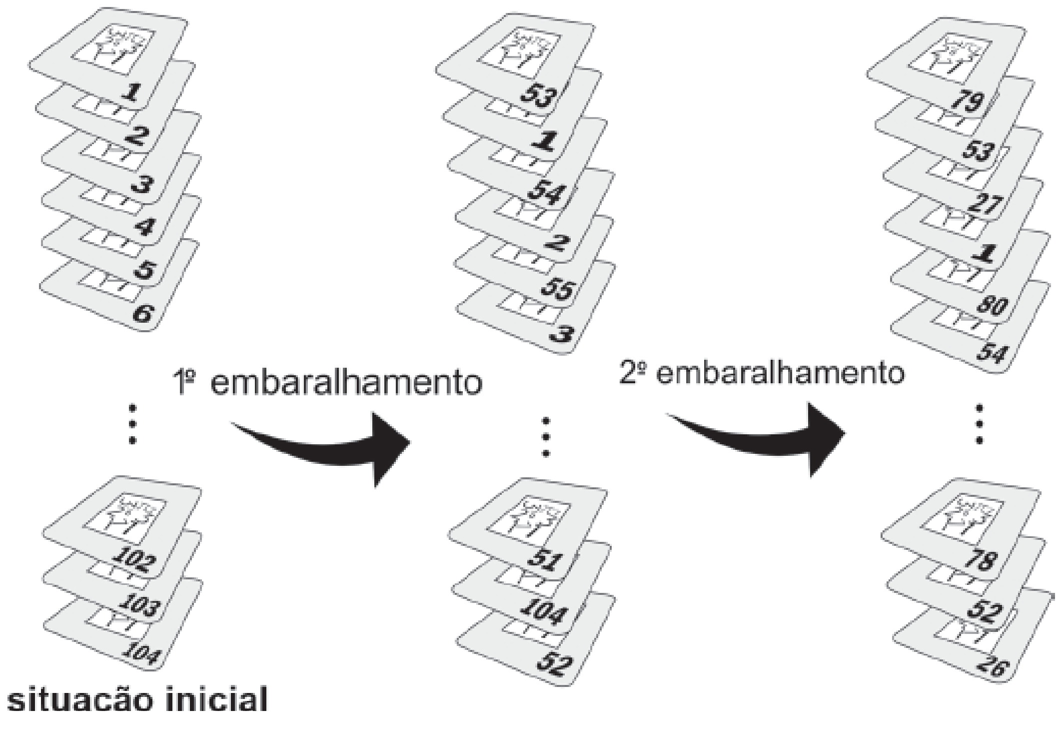
Problema 5
(OBM-2008)No quadro negro são escritos os números $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, ..., 2008^2$. Pedro e Igor jogam um jogo onde eles apagam alternadamente um número por vez até sobrarem apenas dois números. Se a diferença entre estes dois números for múltiplo de 2009, Igor vence. Caso contrário, quem vence é Pedro. Sabendo que Pedro é o primeiro a jogar, diga quem possui a estratégia vencedora. Justifique sua resposta.

COLETÂNEA DE PROBLEMAS N$\underline{\text{O}}$ 02 – 2009 – Nível III

Problema 1
Você tem b envelopes e n notas de um real. Guarde o dinheiro nos envelopes de modo que, sem abrir qualquer envelope daí em diante, você possa pagar qualquer quantia em reais, de 0 a n.
Quais são as restrições de b e n?

Problema 2
Você tem dois potes e cem bolinhas de gude. Metade das bolinhas é vermelha e a outra metade é azul. Você deve pensar num plano para distribuir as cem bolinhas nos dois potes. Um dos potes será escolhido aleatoriamente; a seguir, uma bolinha de gude é retirada desse pote.
(a) Como se pode aumentar a possibilidade de que uma bolinha vermelha seja escolhida?
(b) Qual a probabilidade de selecionar uma bolinha vermelha com seu plano?

Problema 3
(OBMEP-2008) Considere uma pilha de cartas numeradas de 1 a 104. Um *embaralhamento* dessa pilha consiste em intercalar as 52 cartas, de modo que a carta que estava no topo fique em segundo lugar de cima para baixo. A figura a seguir mostra dois embaralhamentos seguidos a partir da posição inicial, na qual as cartas estão dispostas em ordem crescente de cima para baixo.



(a) complete a tabela.

Número de embaralhamentos a partir da situação inicial	1	2	3	4	5	6
Posição da carta de número 5 a partir do topo da pilha	10ª					

(b) Partindo da situação inicial, qual será a posição da carta de número *n* após um embaralhamento?
(c) Partindo da situação inicial, ache duas cartas que trocam de lugar uma com a outra a cada embaralhamento
(d) Um grupo de três cartas que trocam de lugar entre si a cada embaralhamento é chamado ***trio invariante***.
Partindo da situação inicial, encontre todos os trios invariantes.

Problema 4
(OBM-2008) Se x é um número real, denotamos por $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro que é menor ou igual a x. Por exemplo, $\lfloor 2 \rfloor = 2, \lfloor \pi \rfloor = 3$ e $\lfloor -2{,}1 \rfloor = -3$.
Calcule o valor da soma:

$$\lfloor \sqrt[4]{1} \rfloor + \lfloor \sqrt[4]{2} \rfloor + \lfloor \sqrt[4]{3} \rfloor + \lfloor \sqrt[4]{4} \rfloor + \ldots + \lfloor \sqrt[4]{2008} \rfloor.$$

Problema 5
(OBM-2008) Um inteiro positivo n é chamado de ***auto-replicante*** se os últimos dígitos de n^2 formam o número n. Por exemplo, 25 é auto-replicante pois $25^2 = 625$.
Determine a soma de todos os números auto-replicantes com exatamente 4 dígitos (isto é, números auto-replicantes n com $1000 \leq n \leq 9999$).

Problema 6
(OBM-2008) Em uma matriz 2008×2008 o elemento na linha i e coluna j é o número $i + j$ (as linhas e colunas são numeradas de 1 a 2008). Escolhem-se 2008 elementos desta matriz de modo que não haja dois elementos escolhidos numa mesma linha ou coluna. Os elementos são multiplicados.
Qual o menor produto que se pode obter desta forma?