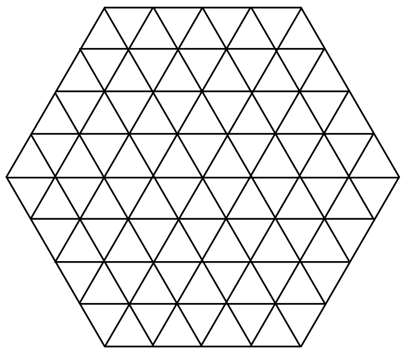
Olimpíada Brasileira de Matemática		Sociedade Brasileira de Matemática		PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

COLETÂNEA DE PROBLEMAS N$^{\underline{\text{O}}}$ 03– 2009 – Nível III

Problema 1
Considere um hexágono regular, cuja região interior é divido em triângulos, desenhados a partir de retas paralelas aos lados do hexágono, como mostra a Figura a seguir.



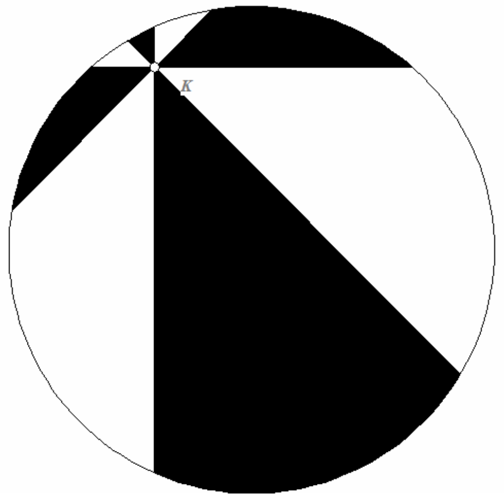
Quantos hexágonos existem na figura?

Problema 2
Seja ΔABC retângulo em A.
Diga, justificando, se é possível partir o ΔABC em 2008 triângulos menores de tal modo que:
(a) Cada triângulo menor seja semelhante ao ΔABC;
(b) Quaisquer dois triângulos da partição tenham áreas distintas.

Problema 3
Pinta-se de vermelho 2008 vértices de um polígono regular de 2009 lados. O outro vértice pinta-se de verde. Seja G o número total dos polígonos tendo um vértice verde e os outros vermelhos. Seja R o número total dos polígonos com todos os vértices vermelhos.
Qual é o maior: R ou G?

Problema 4
Num país distante, um banco tem uma quantidade infinita de notas de 17 e 19 na moeda local.
Prove que existe um número inteiro positivo M tal que o banco pode pagar qualquer quantia inteira $K \geq M$, usando somente as duas notas existentes.

Problema 5
Seja K um ponto qualquer no interior de um círculo unitário. Por K traça-se quatro segmentos de reta, de modo que quaisquer dois segmentos adjacentes formem um ângulo de 45^o. Deste modo, a região limitada pelo círculo fica dividida em 8 regiões. Pinta-se, alternadamente, estas regiões de branco e preto, conforme Figura a seguir.



Encontre o valor total da área pintada de preto.

Problema 6
Um inteiro positivo é chamado de ***formidável*** se ele pode ser escrito como soma de potências quartas de inteiros positivos distintos e é dito ***bem sucedido*** se pode ser escrito como soma de potências sextas de inteiros positivos distintos.
Diga, justificando, se o número 2008 pode ser escrito como soma de um número *formidável* e um número *bem sucedido*.

COLETÂNEA DE PROBLEMAS N$^{\underline{O}}$ 03– 2009 – Nível II

Problema 1
Antônio e Bernardo fazem um trabalho em 2h. Antônio e Carlos fazem o mesmo trabalho em 3 horas. Bernardo e Carlos fazem o mesmo trabalho em 4 horas.
Em quanto tempo os quatro juntos farão o mesmo trabalho?

Problema 2
Um carro está se movendo numa velocidade constante. A cada 15 minutos ele gira 90^o à esquerda ou à direita.
Se o carro iniciou a viagem em algum ponto A e retorna para este ponto, prove que ele gastou um número inteiro de horas na viagem.

Problema 3
Tem-se inicialmente um monte com n caroços de feijão sobre uma mesa, com $n \geq 3$. Dois jogadores, A e B, disputam um jogo, em que jogam alternadamente. O jogador A começa. Uma jogada consiste em escolher um monte de feijão sobre a mesa e separá-lo em dois montes. O vencedor é o jogador que, ao concluir sua jogada, reste sobre a mesa somente montes com 1 ou 2 caroços de feijão.
Para quais valores de n o jogador A vence, supondo que A e B fazem sempre as melhores jogadas?

Problema 4
Numa sacola, tem-se 100 bolas iguais, numeradas de 1 até 100.
Qual é o número ***mínimo*** de bolas que temos que retirar da sacola para ter certeza que retiramos três números consecutivos?

Problema 5
Duas mil crianças numa escola formam uma fila. A primeira criança diz alto o número 1; a segunda fala dois mais o primeiro, ou seja, a segunda criança fala 3; a terceira fala 3 mais o anterior, ou seja, a terceira criança fala 6; a quarta fala 2 mais o anterior, ou seja, a quarta criança fala 8; a quinta criança fala 3 mais a anterior, ou seja a quinta criança fala 11, e assim sucessivamente.
Que número diz a criança que está no lugar 1999? Alguma criança fala o número 1999?

Problema 6
Seja $n > 2$ um inteiro par. Nas casas de um tabuleiro de $n \times n$ devem-se colocar fichas de modo que em cada coluna a quantidade de fichas seja par e distinta de zero, e em cada linha a quantidade de fichas seja ímpar.
Determinar a menor quantidade de fichas que precisamos colocar no tabuleiro para cumprir esta regra.
Mostrar uma configuração com essa quantidade de fichas e explicar porque com menos fichas não se pode cumprir a regra.

COLETÂNEA DE PROBLEMAS N$^{\underline{O}}$ 03– 2009 – Nível I

Problema 1
Um gerente de supermercado colocou para a venda 1000 kg de um produto que tinha 99 % de água. Enquanto o produto esperava para ser vendido, alguma água evaporou, e o percentual de água do produto caiu para 98 %.
Qual é o peso do produto neste momento?

Problema 2
Uma criança escreveu todos os números inteiros de 1 a 1000.
Quantas vezes ela escreveu o dígito 9?

Problema 3
O Sr. Silva tem uma quantidade de limões entre 1000 e 2000, que ele está tentando dividi-los em caixas com a mesma quantidade em cada uma delas. Ele tentou fazer a divisão em 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 caixas mas, em todas estas divisões, sobrou um limão.
Quantas caixas ele precisa para fazer a divisão?

Problema 4
Numa sacola coloca-se 900 bolas iguais, numeradas de 100 a 999. Uma criança retira uma bola da sacola, anota a soma dos dígitos escrito nela, e descarta a bola.
Qual é o ***menor*** número de vezes que a criança deve repetir esta operação para ter certeza que anotará pelo menos três vezes a mesma soma?

Problema 5
Um triângulo eqüilátero ABC tem lado medindo 1 cm. Uma formiga caminha em volta do triângulo, mantendo sempre uma distância de 1 cm do triângulo.
Quando a formiga completa uma volta, quanto ela terá andado?

Problema 6
Em algumas casas de um tabuleiro 10×10 coloca-se uma ficha de maneira que se verifique a seguinte propriedade:
Para cada casa que tem uma ficha, a quantidade de fichas colocadas em sua mesma linha deve ser maior ou igual que a quantidade de fichas colocadas em sua mesma coluna.
Quantas fichas pode haver no tabuleiro?
Diga todas as possibilidades posíveis.