
CICLO DE TREINAMENTO PARA AS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA - 2013

Encontro 01 - 23/05/2013 - Prof. Carlos Gomes

Problemas de paridade, Problemas de coloração e invariantes - I

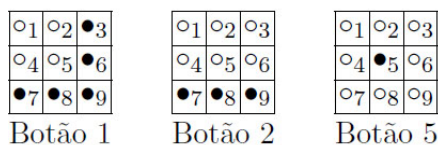
1. Prove que a igualdade $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} = 1$ não admite soluções com a, b, c, d, e e f sendo números ímpares.
2. É possível separar os números $1, 2, 3, \dots, 50$ em dois blocos A e B , de 25 números cada um (sem repetir os mesmos números), de modo que a soma dos números pertencentes a cada um dos dois blocos seja a mesma?
3. A soma dos números primos a e b é 34 e a soma dos números primos a e c é 33. Calcule $a + b + c$.
4. Mostre que $\log_3 2$ é irracional.
5. Você tem um tabuleiro de xadrez e 32 dominós. Cada dominó cobre exatamente 2 quadrados adjacentes do tabuleiro. Desse modo, os 32 dominós podem cobrir os 64 quadrados do tabuleiro de xadrez. Suponha que foram retirados do tabuleiro 2 quadrados diametralmente opostos das filas mais externas do tabuleiro. Diga, justificando, se é possível cobrir os quadrados restantes com 31 dominós.
6. Colocam-se setenta e sete copos sobre uma mesa - todos de cabeça para baixo. Um movimento permitido é desvirar quaisquer quatro copos. É possível chegar a uma situação onde todos os copos estejam virados para cima?
7. Mostre que se você adicionar os inversos dos termos de uma sequência de números inteiros positivos e consecutivos, o numerador da soma (como fração irredutível) é sempre ímpar. Por exemplo,

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = \frac{191}{504}$$

8. (Cone Sul) Um jogo consiste de 9 botões (de cor verde ou vermelha) dispostos da seguinte maneira:

○ ₁	○ ₂	○ ₃
○ ₄	○ ₅	○ ₆
○ ₇	○ ₈	○ ₉

Se é apertado um botão do bordo do quadrado trocam de cor ele e todos seus vizinhos, se é apertado o botão do centro trocam de cor seus 8 vizinhos, porém ele não. Os exemplos seguintes mostram com os círculos vermelhos (◦) as luzes que trocam de cor ao pressionar o botão que é indicado.



É possível (apertando sucessivamente alguns botões) acender todas as luzes de cor verde, se inicialmente estavam todas acesas com a luz vermelha? Justifique a sua resposta.

9. Seja a_1, a_2, \dots, a_n uma permutação dos números $1, 2, 3, \dots, n$. Mostre que, se n é um número ímpar, então o produto

$$P = (a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$$

é um número par.

10. Sejam $P_1, P_2, \dots, P_{2013}$ pontos distintos de um plano α . Considere os segmentos $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{2012}P_{2013}, P_{2013}P_1$. Existe uma reta que passe através do interior de todos esses segmentos?
11. Mostre que não é possível escolher três números inteiros distintos a, b e c tais que

$$a - b | b - c, \quad b - c | c - a, \quad c - a | a - b$$

12. Considere $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ como o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) cujas coordenadas são inteiras (lattice points). Suponha que com estes pares ordenados sejam permitidas as seguintes operações:

- $(x, y) \mapsto (x + 1, y + 1)$.
- Se x e y são pares, $(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$.
- A partir dos (x, y) e (y, z) podemos produzir o par (x, z) , ou seja,

$$(x, y) \text{ e } (y, z) \mapsto (x, z)$$

Iniciando-se com o par $(7, 29)$ é possível, aplicando um certo número de vezes as operações acima descritas, obter o par $(3, 1999)$?

13. (Cone Sul) No plano cartesiano, considere os pontos de coordenadas inteiras. Uma operação consiste em escolher um destes pontos e realizar uma rotação de 90° no sentido anti-horário, com centro neste ponto. É possível, através de uma sequência dessas operações, levar o triângulo de vértices $(0, 0), (1, 0)$ e $(0, 1)$ no triângulo de vértices $(0, 0), (1, 0)$ e $(1, 1)$?
14. (Cone Sul) Estando algumas pilhas de discos numa mesa, um movimento admissível é escolher uma pilha, descartar um dos seus discos e dividir o que resta da pilha em duas pilhas não vazias, não necessariamente iguais. Inicialmente há sobre a mesa só uma pilha e esta tem 1000 discos. Determine se é possível, depois de alguma sucessão de movimentos admissíveis, chegar a uma situação onde cada pilha tenha exatamente 3 discos.
15. Os números $1, 2, 3, \dots, 2013$ são escritos em um quadro negro. Podemos apagar dois números e escrever sua diferença no local. Após muitas operações ficamos apenas com um número. Esse número pode ser o zero?