CICLO DE TREINAMENTO PARA AS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA - 2013

Encontro 01 - 23/05/2013 - Prof. Carlos Gomes

Problemas de paridade, Problemas de coloração e invariantes - I

1. Prove que a igualdade $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}=1$ não admite soluções com a, b, c, d, e e f sendo números ímpares.

2. É possível separar os números $1, 2, 3, \cdots, 50$ em dois blocos A e B, de 25 números cada um (sem repetir os mesmos números), de modo que a soma dos números pertencentes a cada um dos dois blocos seja a mesma?

3. A soma dos números primos a e b é 34 e a soma dos números primos a e c é 33. Calcule $a+b+c$.

4. Mostre que $\log_3 2$ é irracional.

5. Você tem um tabuleiro de xadrez e 32 dominós. Cada dominó cobre exatamente 2 quadrados adjacentes do tabuleiro. Desse modo, os 32 dominós podem cobrir os 64 quadrados do tabuleiro de xadrez. Suponha que foram retirados do tabuleiro 2 quadrados diametralmente opostos das filas mais externas do tabuleiro. Diga, justificando, se é possível cobrir os quadrados restantes com 31 dominós.

6. Colocam-se setenta e sete copos sobre uma mesa - todos de cabeça para baixo. Um movimento permitido é desvirar quaisquer quatro copos. É possível chegar a uma situação onde todos os copos estejam virados para cima?

7. Mostre que se você adicionar os inversos dos termos de uma sequência de números inteiros positivos e consecutivos, o numerador da soma (como fração irredutível) é sempre ímpar. Por exemplo,
$$\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}=\frac{191}{504}$$

8. (Cone Sul) Um jogo consiste de 9 botões (de cor verde ou vermelha) dispostos da seguinte maneira:

$\circ_1$	$\circ_2$	$\circ_3$
$\circ_4$	$\circ_5$	$\circ_6$
$\circ_7$	$\circ_8$	$\circ_9$

Se é apertado um botão do bordo do quadrado trocam de cor ele e todos seus vizinhos, se é apertado o botão do centro trocam de cor seus 8 vizinhos, porém ele não. Os exemplos seguintes mostram com os círculos vermelhos $(\circ)$ as luzes que trocam de cor ao pressionar o botão que é indicado.

○1	○2	●3
○4	○5	●6
●7	●8	●9

Botão 1

○1	○2	○3
○4	○5	○6
●7	●8	●9

Botão 2

○1	○2	○3
○4	●5	○6
○7	○8	○9

Botão 5

É possível (apertando sucessivamente alguns botões) acender todas as luzes de cor verde, se inicialmente estavam todas acesas com a luz vermelha? Justifique a sua resposta.

9. Seja $a_1, a_2, \cdots, a_n$ uma permutação dos números $1, 2, 3, \cdots, n$. Mostre que, se n é um número ímpar, então o produto
$$P = (a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$$
é um número par.

10. Sejam $P_1, P_2, \cdots, P_{2013}$ pontos distintos de um plano α. Considere os segmentos $P_1P_2, P_2P_3, \cdots$ $P_{2012}P_{2013}, P_{2013}P_1$. Existe uma reta que passe através do interior de todos esses segmentos?

11. Mostre que não é possível escolher três números inteiros distintos a, b e c tais que
$$a - b | b - c \ , \ b - c | c - a \ , \ c - a | a - b$$

12. Considere $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ como o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) cujas coordenadas são inteiras(lattice points). Suponha que com estes pares ordenados sejam permitidas as seguintes operações:
    - $(x, y) \mapsto (x + 1, y + 1)$.
    - Se x e y são pares, $(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$.
    - A partir dos (x, y) e (y, z) podemos produzir o par (x, z), ou seja,
    $$(x, y) \ \ e \ \ (y, z) \mapsto (x, z)$$

    Iniciando-se com o par $(7, 29)$ é possível, aplicando um certo número de vezes as operações acima descritas, obter o par $(3, 1999)$?

13. (Cone Sul) No plano cartesiano, considere os pontos de coordenadas inteiras. Uma operação consiste em escolher um destes pontos e realizar uma rotação de 90^o no sentido anti-horário, com centro neste ponto. É possível, através de uma sequência dessas operações, levar o triângulo de vértices $(0, 0), (1, 0)$ e $(0, 1)$ no triângulo de vértices $(0, 0), (1, 0)$ e $(1, 1)$?

14. (Cone Sul) Estando algumas pilhas de discos numa mesa, um movimento admissível é escolher uma pilha, descartar um dos seus discos e dividir o que resta da pilha em duas pilhas não vazias, não necessariamente iguais. Inicialmente há sobre a mesa só uma pilha e esta tem 1000 discos. Determine se é possível, depois de alguma sucessão de movimentos admissíveis, chegar a uma situação onde cada pilha tenha exatamente 3 discos.

15. Os números $1, 2, 3, ..., 2013$ são escritos em um quadro negro. Podemos apagar dois números e escrever sua diferença no local. Após muitas operações ficamos apenas com um número. Esse número pode ser o zero?