DMAT DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA — Competição Matemática do Rio Grande do Norte — UFRN UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

CICLO DE TREINAMENTO PARA AS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA - 2013

Encontro 02 - 06/06/2013 - Prof. Carlos Gomes

Problemas de paridade, Problemas de coloração e invariantes - II

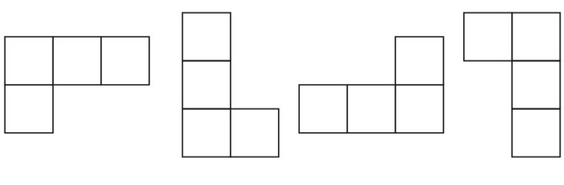
1. Em um tabuleiro 8×8 as quatro casas do canto estão pintadas de preto e as outras casas de branco. Podemos escolher qualquer linha ou coluna e trocar a cor de todas as suas casas. Usando essas operações, podemos obter um tabuleiro inteiramente preto?

2. (Fortaleza 2003) Sobre uma circunferência tomamos $m+n$ pontos, que a divide em $m+n$ pequenos arcos. Nós pintamos m pontos de branco e os n restantes de preto. Em seguida, associamos a cada um dos $m+n$ arcos um dos números $2, 1/2$ ou 1, dependendo se as extremidades do arco sejam, respectivamente, ambas brancas, ambas pretas ou uma preta e uma branca. Calcule o produto dos números associados a cada um dos $m+n$ arcos.

3. Mostre que a medida do raio da circunferência inscrita num triângulo Pitagórico é sempre inteira.

4. Em cada um dos 10 degraus de uma escada há uma rã. Cada rã pode, dando um pulo, ir para um outro degrau. Porém, quando uma rã faz isso, ao mesmo tempo uma outra rã deve pular a mesma quantidade de degraus em sentido contrário; uma sobe a e a outra desce. Conseguirão as rãs colocar-se todas juntas num mesmo degral em algum instante?

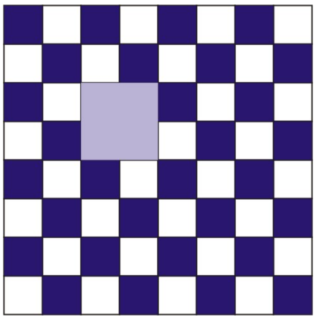
5. Um L tretrominó é uma figura composta de 4 quadrados 1×1 na forma de L, veja figura a seguir.



L-Tretaminós

a)Diga, justificando, se um tabuleiro 8×8 pode ser ladrilhado por 16 ladrilhos da forma L tretraminós.

b)Se do tabuleiro 8×8 removemos um quadrado qualquer 2×2, o tabuleiro mutilado pode ser coberto por 15 ladrilhos do tipo L tretraminó?



6. Os números $1, 2, ..., 20$ são escritos em um quadro negro. Podemos apagar dois deles a e b e escrever no lugar o número $a+b+ab$. Após muitas operações ficamos apenas com um número. Qual deve ser esse número?

7. Começando com a tripla $\{3, 4, 12\}$ podemos a cada passo escolher dois número a e b e trocá-los por $0.6a - 0.8b$ e $0.8a + 0.6b$. Usando essa operação podemos obter $\{4, 6, 12\}$?

8. Dada uma equação quadrática $ax^2+bx+c = 0$ podemos efetuar duas trnasformações, a saber:

$$T_1 : a \leftrightarrow c, ax^2 + bx + c = 0 \mapsto cx^2 + bx + a = 0$$

   ou seja, a transformação T_1 troca as posições dos coeficientes a e c e mantém o coeficiente b na sua posição original.

$$T_2 : x \mapsto x + \alpha, \quad \text{com} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

   ou seja, a transformação T_2 substitui, na equação $ax^2 + bx + c = 0$, x por $x + \alpha$, onde α é um número real qualquer.
   Usando um número qualquer de vezes as transformações T_1 e T_2 é possível transformar a equação $x^2 + x - 1 = 0$ na equação $x^2 + 2010x - 2011 = 0$.

9. * Um total de 2000 pessoas estão divididas entre os 115 quartos de uma mansão. A cada minuto, uma pessoa anda para um quarto com número igual ou maior de pessoas do qual ela estava. Prove que eventualmente todas as pessoas vão estar em um mesmo quarto.

10. (Leningrado 1987) As moedas dos países Dillia e Dallia são o diller e o daller, respectivamente. Podemos trocar um diller por dez dallers e um daller por dez dillers. Zequinha possui um diller e deseja obter a mesma quantidade de dillers e dallers usando essas operações. É possível que isso ocorra?