DMAT DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA — Competição Matemática do Rio Grande do Norte — UFRN UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

CICLO DE TREINAMENTO PARA AS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA - 2013

Encontro 03 - 08/06/2013 - Prof. Carlos Gomes

Problemas de Fatorações, Produtos notáveis e Equações

---

1. Se $a+b=1$ e $a^2+b^2=2$, determine o valor de a^3+b^3.

2. Se $ab=1$ e $a^2+b^2=3$, determine o valor de $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+2$.

3. Fatore x^4+4y^4 como o produto de dois polinômios do 2° grau.

4. Mostre que se $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ e $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$, então $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

5. Se $x+y+z=0$, mostre que $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

6. Calcule o valor da expressão:
$$\frac{2004^3-1003^3-1001^3}{2004.1003.1001}$$

7. Se $x,y,z\in\mathbb{R}$ são tais que $xyz=1$. Mostre que:
$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{z+xz}=1$$

8. Quais são as raízes reais da equação $x^3-5x^2-x+5=0$?

9. Mostre que para quaisquer $x,y,z\in\mathbb{R}$ (distintos) temos
$$\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}=1$$

10. Determine todos os valores inteiros de x tais que x^2-7x-4 é um quadrado perfeito.

11. Calcule:
$$\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{\cdots+\frac{1}{2005}}}}}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{\cdots+\frac{1}{2005}}}}}}$$

12. Mostre que não existem inteiros x e y tais que:
$$x^5-x^4y-13x^3y^2+13x^2y^3+36xy^4-36y^5=77$$

13. Os alunos de uma turma fizeram uma coleta para juntar 405 reais, custo de uma excursão. Todos contribuíram igualmente. Na última hora, dois alunos desistiram. Com isso a parte de cada um deles sofreu um aumento de um real e vinte centavos. Quantos alunos tem a turma?

14. Se α e β são as raízes da equação $x^2 + x - 1 = 0$, determine o valor de

$$\alpha^{11} + \alpha^{10}\beta + \alpha^9\beta^2 + \alpha^8\beta^3 + \alpha^7\beta^4 + \alpha^6\beta^5 + \alpha^5\beta^6 + \alpha^4\beta^7 + \alpha^3\beta^8 + \alpha^2\beta^9 + \alpha\beta^{10} + \beta^{11}$$

15. Resolva a equação $(x-5)(x-7)(x+6)(x+4) = 504$.

16. Se a, b e c são números reais distintos, mostre que para todo $x \in \mathbb{R}$ temos:

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} = 1$$

17. Se a, b e c são números reais distintos que satisfazem as equações

$$\begin{cases} a^3 + pa + q = 0 \\ b^3 + pb + q = 0 \\ c^3 + pc + q = 0 \end{cases}$$

Calcule $a + b + c$.

18. Se $a + b + c = 0$, mostre que:

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$$

19. Mostre que $(a+b)^7 - a^7 - b^7 = 7ab(a+b)(a^2 + ab + b^2)^2$.

20. Se $x + \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, mostre que $x^{2000} + \dfrac{1}{x^{2000}} = 2$.

21. Para que valores de $a \in \mathbb{N}$ a expressão $a^4 + 4$ é um número primo?

22. Prove que se $\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} = 0$, então

$$\frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2} = 0$$

23. Se a, b e c são números reais não nulos tais que $a + b + c = 0$, calcule

$$\frac{\left(a^3 + b^3 + c^3\right)^2 \left(a^4 + b^4 + c^4\right)}{\left(a^5 + b^5 + c^5\right)^2}$$

24. Prove que se x, y e z são números racionais distintos, então a expressão

$$\frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} + \frac{1}{(x-y)^2}$$

é um quadrado perfeito.

25. Fatore $8(x+y+z)^3 - (x+y)^3 - (y+z)^3 - (x+z)^3$.