CICLO DE TREINAMENTO PARA AS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA - 2013

Encontro 08 - 08/08/2013 - Prof. Carlos Gomes

Problemas Geométricos - I

1. Prove que se você puder formar um triângulo a partir de segmentos com comprimentos a, b e c, então você também poderá formar um triângulo com segmentos de comprimentos $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ e $\sqrt{c}$.

2. É possível que as três alturas de um triângulo sejam proporcionais aos números $1, 2$ e 3?

3. Um triângulo de área 1 tem lados com comprimentos a, b e c, onde $a \geq b \geq c$. Mostre que $b \geq \sqrt{2}$.

4. Seja ABC um triângulo isósceles com $AB = AC$ e $\hat{A} = 100°$. Seja P um ponto no interior do triângulo tal que $P\hat{B}C = 30°$, $P\hat{C}B = 20°$. Calcule a medida do ângulo $\angle(P\hat{A}C)$.

5. (OBM) Seja ABC um triângulo, P o pé da bissetriz interna relativa ao lado AC e I o seu incentro. Se $AP + AB = CB$, prove que o triângulo API é um triângulo isósceles.

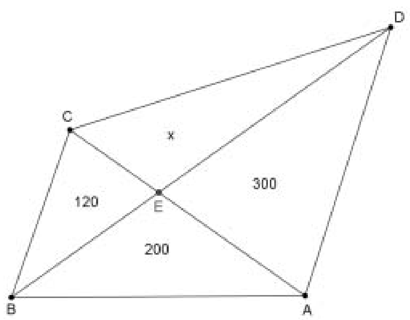
6. (IBERO)Seja ABC um triângulo e sejam X, Y e Z pontos sobre os lados BC, AC e AB respectivamente. Mostre que a área do triângulo formado pelos circuncentros dos triângulos AYZ, BXZ e CXY é maior ou igual a $1/4$ da área do triângulo ABC.

7. Se os pontos K, L, M e N são os pontos médios dos lados de um quadrilátero $ABCD$, mostre que $(ABCD) = 2.(KLMN)$, onde os parênteses representam a medida da área.

8. Em um triângulo ABC, estão desenhadas as alturas AA_1, BB_1, CC_1 e as medidanas AA_2, BB_2 e CC_2. Prove que o comprimento da linha poligonoal $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$ é igual ao perímetro do triângulo ABC.

9. É dado um triângulo retângulo com um ângulo agudo de $30°$. Prove que o comprimento da parte da mediatriz da hipotenusa contida no interior do triângulo é igual a $1/3$ do maior cateto do triângulo.

10. O quadrilátero $ABCD$ foi seccionado em quatro triângulos conforme ilustra a figura abaixo:



Se os números representados no interior dos triângulos representam as medidas das suas áreas, determine o valor do x.