CICLO DE TREINAMENTO PARA AS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA - 2013

Encontro 09 - 10/08/2013 - Prof. Carlos Gomes

Problemas Geométricos - II

---

1. Encontre a área do quadrilátero convexo $ABCD$ sabendo que a reta AC é perpendicular a $BD, AC = 3$ e $BD = 8$.

2. As retas r e s são concorrentes em A e tangentes a um círculo Γ de centro O. Os pontos $P \in r$, $Q \in S$ são tais que PQ tangencia Γ e deixa A e O em semiplanos opostos. Se $P\hat{A}Q = 28^\circ$, calcule $P\hat{O}Q$.

3. No retângulo $ABCD$ de lados $AB = 4m$ e $BC = 3m$, marcamos sobre a diagonal AC o ponto M tal que $DM \perp AC$. Calcule o comprimento do segmento AM.

4. (OCM) Seja ABC um triângulo tal que $A\hat{B}C = 2A\hat{C}B$. Mostre que $b^2 = c(a + c)$ (sugestão: se D é o pé da bissetriz interna traçada a partir de B, mostre inicialmente que $\Delta ABC \sim \Delta ADB$).

5. (OCM) Um triângulo ABC é tal que $\hat{C} = 2\hat{A}$ e $AC = 2BC$. Mostre que tal triângulo é retângulo.

6. (OCS - adaptado) Sejam $\Gamma(O, R)$ o círculo circunscrito ao triângulo ABC e H_a é o pé da altura relativa ao lado BC. Se A' é o simétrico de A em relação a O, prove que $\Delta AA'C \sim \Delta ABH_a$. Conclua, a partir daí, que se $AB = c, AC = b$ e $AH_a = h_a$, então $h_a = \frac{bc}{2R}$.

7. Se um hexágono convexo $A_1A_2A_3 \cdots A_6$ é circunscritível, prove que
$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_5A_6} = \overline{A_2A_3} + \overline{A_4A_5} + \overline{A_6A_1}$$

8. (IMO) Sobre um círculo Γ são dados três pontos distintos A, B e C. Mostre como construir com régua e compasso um quarto ponto D sobre Γ, tal que o quadrilátero convexo $ABCD$ seja circunscritível (sugestão: seja $AB = a$, $BC = b$. supondo o problema resolvido, marque D sobre o arco AC de Γ que não contém B e sejam $CD = x$ e $AD = y$. Inicialmente, mostre que podemos supor $a \neq b$, diagmos $a < b$, de sorte que devemos ter $x - y = b - a > 0$. Se $E \in CD$ for tal que $CE = b - a$, então E pertence ao círculo de centro C e raio $b - a$; use o fato de ADE ser isósceles e $ABCD$ ser inscritível para mostrar que E também pertence a um dos arcos capazes de $180^\circ - \frac{1}{2}A\hat{B}C$ sobre AC).

9. Considere no plano quatro retas que se intersectam duas a duas e tais que não há três retas passando por um mesmo ponto. Prove que os círculos circunscritos aos quatro triângulos que tais retas determinam passam todos por um mesmo ponto.

10. Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscritível. Demonstre que os círculos inscritos nos triângulos ABC e ACD têm, com a diagonal AC, um mesmo ponto em comum (sugestão: use o teorema de Pitot).