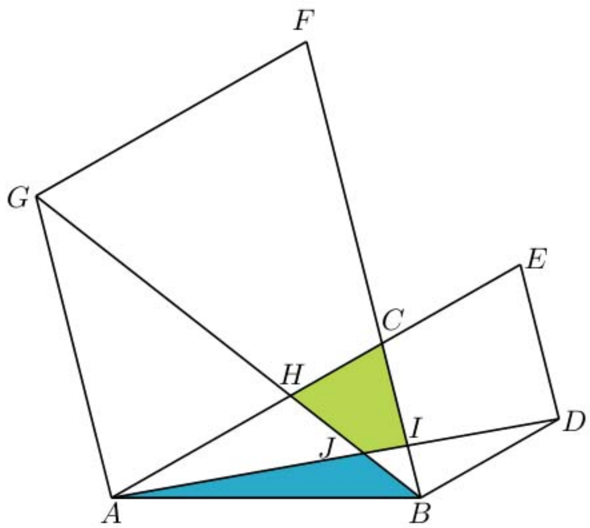
CICLO DE TREINAMENTO PARA AS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA - 2013

Encontro 10 - 15/08/2013 - Prof. Carlos Gomes

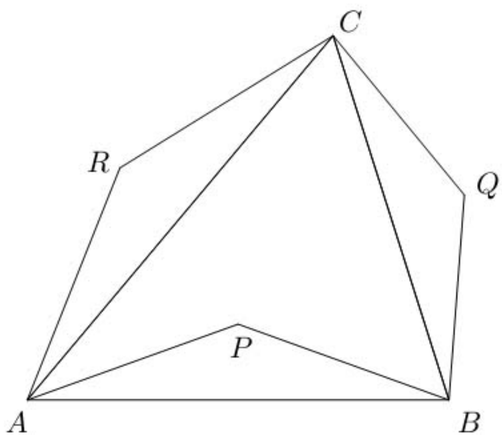
Problemas Geométricos - III

1. (OPM-2012)Na figura seguinte, os pontos E e F estão nos prolongamentos de AC eBC, $ACFG$ e $BCED$ são losangos, H é o ponto de interseção de AC e BG, I é o ponto de interseção de BC e AD, e J é o ponto de interseção de AI e BH.



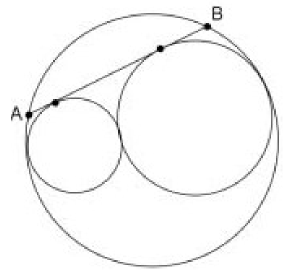
Mostre que os polígonos $JICH$ e ABJ tem a mesma área.

2. (OPM-2011)O ponto P , no interior do triângulo ABC, pertence a mediatriz de AB. Os pontos Q e R, exteriores ao triângulo, são tais que BPA, BQC e CRA são triângulos semelhantes.



Mostre que o quadrilátero $PQCR$ é um paralelogramo.

3. (AIME-1995)Três circunferências de raios $3, 6$ e 9 tangenciam-se conforme ilustra a figura abaixo:



Determine a medida da corda AB da circunferência menor e que tangencia as outras duas.

4. (AIME-1997)Determine o valor de k para que quatro círculos de raios $5, 5, 8$ k sejam tangentes externamente.

5. (AIME-2003)Seja S o conjunto dos vértices de um cubo de aresta 1. Determine a soma das áreas de todos os triângulos que podemos formar com vértices em S.

6. (Russia)Prove que se dois quadriláteros tiverem os mesmos pontos médios em todos os seus lados, então as suas áreas são iguais.

7. (Russia)As diagonais de um trapézio $ABCD$, com BC paralelo a AD se intersectam no ponto O. Mostre que os triângulos AOB e COD tem áreas iguais.

8. (RPM)Seja ABC um triângulo acutâgulo de circuncentro O e sejam D, E e F as interseções das semirretas AO, BO e CO com os lados BC, AC e AB, respectivamente. Sendo R o circunraio do triângulo ABC, mostre que
$$\frac{1}{OD} + \frac{1}{OE} + \frac{1}{OF} \geq \frac{6}{R}$$

9. (RPM) Considere o triângulo ABC e pontos X, Y e Z nos lados BC, AC e AB, respectivamente tais que A, B, C, X, Y e Z são todos distintos entre si. Mostre que as circunferências circunscritas aos triângulos AYZ, BZX e CXY têm um ponto em comum.

10. (Russia)Dois círculos se intersectam nos pontos A e B. O comprimento de AC é igual ao diâmetro do primeiro círculo e o comprimento de AD é igual ao diâmetro do segundo círculo. Prove que os pontos B, C e D pertencem a uma mesma reta.