CICLO DE TREINAMENTO PARA AS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA - 2013

Encontro 12 - 29/08/2013 - Prof. Carlos Gomes

Problemas sobre desigualdades Algébricas e Geométricas

1. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^+$ tais que $x + y = 8$. Mostre que: $\left(x + \frac{1}{y}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{x}\right)^2 \geq \frac{289}{8}$.
2. Demonstre que se a, b e c são números reais tais que $a, b, c > 0$ e $a+b+c = 1$, então $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$.
3. Mostre que se x, y e z são números reais positivos então $\frac{1}{x}(1 + xy) + \frac{1}{y}(1 + yz) + \frac{1}{z}(1 + xz) \geq 6$.
4. Mostre que se a, b e c são números reais positivos então $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} > \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}$.
5. Mostre que se a, b e c são números reais positivos então $\frac{a^4+b^4+c^4}{a+b+c} \geq abc$.
6. Prove que se x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são números reais positivos, então
$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 \geq 4.\left(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_6\right)$$
7. Demonstre que com a condição $2x + 4y = 1$ temos a desigualdade $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}$.
8. Demostre que se $a + b = 1$, então $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.
9. Se a e b são números reais positivos, mostre que $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$.
10. Comprei na feira um queijo que pesou 32 quilos numa balança de dois pratos. Desconfiei da pesagem e o vendedor propôs, como compensação, vender-me um queijo igual, desta vez pesado no outro prato da balança. O peso foi de 18 quilos. Ganhei ou perdi na transação? Qual é o verdadeiro peso do queijo?
11. Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$ tais que $a^2 + b^2 = 1$. Mostre que $ab + \max\{a, b\} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$.
12. (Torneio das cidades). Se a, b, c são comprimentos dos lados de um triângulo, prove que:
$$a^3 + b^3 + 3abc > c^3$$
13. (APMO-1996)Se a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo, mostre que
$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$
14. Se h_a, h_b e h_c são as medidas das alturas de um triângulo ABC e r é a medida do raio da circunferência inscrita no mesmo triângulo, mostre que:
$$h_a + h_b + h_c \geq 9r$$
15. Se a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo ABC com área (ABC), mostre que:
$$4\sqrt{3}(ABC) \leq a^2 + b^2 + c^2$$