



CICLO DE TREINAMENTO PARA AS OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA - 2013

Encontro 14 - 12/09/2013 - Prof. Carlos Gomes

Problemas Olímpicos (Básicos)

1. Miguel quer agrupar os números inteiros de 1 a 18 em nove pares de modo que a soma dos dois números de cada par seja um quadrado perfeito. De quantas formas pode o Miguel agrupar estes números?
2. O Ducado de Colmeias tem a forma de um hexágono regular com 20km de lado. A Duquesa de Colmeias decidiu passear na sua carruagem ao longo do perímetro do Ducado. Tendo começado o passeio num vértice do hexágono, percorreu 50km. A que distância do ponto de partida, medida em linha recta, se encontra a Duquesa?
3. O Gonçalo e o Raul estão a praticar piano, tocando alternadamente uma nota cada um. O Gonçalo repete a sequência Mi, Sol, Si, Lá, Dó, enquanto que o Raul toca a sequência Fá, Ré, Fá, Lá, Dó, Sol, Si, de forma que as primeiras notas tocadas são Mi, Fá, Sol, Ré, Si, Fá, Lá, Lá. Ao fim de quantas notas se ouve a sequência Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si, Dó?
4. Na Capela dos Ossos estão várias velas do mesmo tamanho. No primeiro dia acende-se uma vela durante uma hora. No segundo dia, acendem-se duas velas, durante uma hora, no terceiro dia acendem-se três velas, durante uma hora, e assim sucessivamente, até no último dia, em que se acendem todas as velas, durante uma hora. No fim desse dia, todas as velas ficam completamente gastas. Determina todas as possibilidades para o número de velas.
5. Numa festa há 1000 pessoas. Sabendo que cada uma dessas 1000 pessoas conhece pelo menos uma pessoa na festa, mostre que existem pelo menos duas pessoas com o mesmo número de conhecidos.
6. No plano cartesiano são escolhidos aleatoriamente 5 pontos com ambas as coordenadas inteiras. Mostre que existem 2 destes 5 pontos tais que as coordenadas do ponto médio do segmento formado por estes 2 pontos possui coordenadas inteiras.
7. No espaço tridimensional são escolhidos aleatoriamente 9 pontos cujas coordenadas são inteiras. Mostre que existem pelo menos 2 destes pontos tais que as coordenadas do ponto médio do segmento formado por estes 2 pontos possui coordenadas inteiras.
8. Mostre que num conjunto de 27 diferentes números ímpares, em que todos são menores do que 100 existem pelo menos dois números cuja soma é 102.
9. Considere um paralelepípedo de dimensões 3, 6 e 9. Mostre que, dados 28 pontos quaisquer no seu interior ou em sua superfície. Existem pelo menos dois pontos que distem entre si, no máximo $\sqrt{14}$.
10. Cinco trabalhadores receberam como salário R\$1.500,00 ao todo. Cada um deles quer comprar um telefone celular que custa R\$320,00. Mostre que pelo menos um deles vai ter que esperar no mínimo o próximo pagamento para poder comprar o celular.