Equações reais, Soluções imaginárias.

Carlos A. Gomes
UFRN

1 Introdução

Na última edição da RPM (número 77) há um artigo "Por que $e^{i\theta} = cos\theta + i.sen\theta$?", do professor José Paulo Carneiro, onde é exibida uma explicação para a bela igualdade. Motivado por este artigo, vamos utilizar a fórmula de Euler, $e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$, para estender algumas funções reais para o ambiente dos números complexos, investigando que propriedades das funções antigas são mantidas e que propriedades são alteradas no campo dos números complexos. Além disso vamos usar as idéias desenvolvidas no início do nosso texto para mostrar que algumas equações tais como $1^x = 3$, $sen(x) = 2$, entre tantas outras, que não possuiam soluções no campo dos números reais passam a ter (várias) soluções no campo dos números complexos.

2 Funções exponencial e logarítmica complexas

Como sabemos um número complexo z sempre pode ser representado na sua forma algébrica $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$. Motivado bela fórmula de Euler $e^{i\theta} = cos\theta + i.sen\theta$"e pela propriedade $e^{x+y} = e^x.e^y$ da função exponencial real, definimos a função **exponencial complexa** por

$$e^z = e^{x+yi} = e^x(cosy + iseny)$$

Note que no caso particular de z ser um número real ($y = 0$), segue que

$$e^z = e^x(cos0 + isen0) = e^x(1 + i.0) = e^x.1 = e^x$$

o que mostra que a definição de e^z é boa, pois quando $y = 0$ a exponencial complexa transforma-se na exponencial real. Além disso, pode-se mostar sem grandes dificuldades que a expoencial complexa goza de algumas propriedades análogas as da expenencial real, como por exemplo,

$$e^0 = 1, \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1}.e^{z_2}, \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}, \quad (e^{z_1})^n = e^{nz_1} \quad \text{para} \quad n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

Embora as funções exponencial real e complexa tenham todas essas semelhanças elas também possuem grandes diferenças. Uma das mais surpreendentes é que a função exponencial complexa é periódca de período $2\pi i$, pois

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{(x+yi)+2\pi i} \\ &= e^{x+(y+2\pi)i} \\ &= e^{x}\left(\cos(y+2\pi) + i sen(y+2\pi)\right) \\ &= e^{x}(\cos y + i sen y) \\ &= e^{z} \end{aligned}$$

o que nos mostra que $2\pi i$ é o período da função exponencial complexa.

Todo número complexo $z \neq 0$ pode ser escrito na forma $z = |z|e^{i\theta}$ (forma exponencial de z), onde θ é o argumento principal de z, pois

$$z = |z|\underbrace{(\cos\theta + i.sen\theta)}_{=e^{\theta}} = |z|e^{i\theta}$$

Assim, motivados pelas propriedades da função logarítmica real, escrevemos

$$z = |z|e^{i\theta} \Rightarrow \ell n(z) = \ell n\left(|z|e^{i\theta}\right) \Rightarrow$$

$$\ell n(z) = \ell n|z| + \ell n e^{i\theta} \Rightarrow \ell n(z) = \ell n|z| + i\theta.\ell n e \Rightarrow$$

$$\ell n(z) = \ell n|z| + i\theta, \quad \text{com} \quad \theta = arg(z)$$

Diante do que foi exposto acima, para um número complexo z, definimos a função (multivalente) $\ell n z$ como sendo

$$\ell n(z) = \log_e|z| + i arg(z)$$

onde $\log_e x$ é a função logarítmica real de base e. Note que a função logarítmica complexa é multivalente, isto é, assume diversos valores para cada número complexo z, visto que $arg(z)$ não é único. Quando restringimos $arg(z)$ ao intervalo $(-\pi, \pi]$, dizemos que estamos diante do valor principal da função $\ell n(z)$. Assim, por exemplo, se quisermos calcular o valor principal $\ell n(-2)$ (os números reais negativos possuem logaritmos complexos!), basta ver que -2 possui módulo 2 e argumento π e portanto,

$$\ell n(-2) = \log_e 2 + i\pi$$

A função logarítmica complexa goza das propriedades

$$\ell n\left(z_1.z_2\right) = \ell n(z_1) + \ell n(z_2), \quad \ell n\left(\frac{z_1}{z_1}\right) = \ell n(z_1) - \ell n(z_2), \quad \ell n z_1^{n} = n.\ell n z_1$$

que são análogas as propriedades da função logarítmica real.

3 Funções seno e cosseno complexas

Voltando à fórmula de Euler, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\mathrm{sen}\theta$, e substituindo $\theta \in \mathbb{R}$ por x e depois por $-x$, com $x \in \mathbb{R}$, segue que

$$\begin{cases} e^{ix} = \cos(x) + i\mathrm{sen}(x) \\ e^{-ix} = \cos(-x) + i\mathrm{sen}(-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{ix} = \cos(x) + i\mathrm{sen}(x) \\ e^{-ix} = \cos(x) - i\mathrm{sen}(x) \end{cases}$$

Inicialmente adicionando e depois subtraindo as duas últimas igualdades acima obtemos:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\mathrm{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Motivados por essas igualdades definimos as funções cosseno e seno complexas, para cada $z = x + yi$ com $x, y \in \mathbb{R}$ como sendo

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Perceba que se z for um número real $y = 0$ as funções cosseno e seno complexas transformam-se nas funções cosseno e seno reais, visto que se $z = x$, com $x \in \mathbb{R}$ segue que

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos(x)$$

$$\mathrm{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \mathrm{sen}(x)$$

o que mostra que as definições de $\cos(z)$ e de $\mathrm{sen}(z)$ são boas , pois quando $y = 0$ as funções cosseno e seno complexas transformam-se nas funções cosseno e seno reais. Além disso, pode-se mostar sem grandes dificuldades que as funções cosseno e seno complexas gozam de algumas propriedades análogas as das funções cosseno e seno reais, como por exemplo,

$$\cos(-z) = \cos(z), \quad \mathrm{sen}(-z) = -\mathrm{sen}(z)$$

$$\cos^2 z + \mathrm{sen}^2(z) = 1$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \mathrm{sen} z_1 \mathrm{sen} z_2$$

$$\mathrm{sen}(z_1 \pm z_2) = \mathrm{sen} z_1 \cos z_2 \pm \mathrm{sen} z_2 \cos z_1$$

$$\mathrm{sen}(2z) = 2\mathrm{sen}(z)\cos(z), \quad \cos(2z) = \cos^2 z - \mathrm{sen}^2 z$$

Uma outra forte analogia entre as funções cosseno e seno complexas e as funções cosseno e senos reais é que ambas são periódicas de período 2π, o que pode ser justificado pelas igualdades:

$$\cos(z+2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz+2\pi i} + e^{-iz-2\pi i}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos(z)$$

$$\operatorname{sen}(z+2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} = \frac{e^{iz+2\pi i} - e^{-iz-2\pi i}}{2} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \operatorname{sen}(z)$$

visto que $e^{i(z+2\pi)} = e^{iz+2\pi i} = e^{iz}$ e $e^{-i(z+2\pi)} = e^{-iz-2\pi i} = e^{-iz}$, pois, como já vimos, a função exponencial complexa possui período $2\pi i$. Apesar destas fortes analogias, as funções cosseno e seno complexas também possuem grandes diferenças em relação as funções cosseno e seno reais. Uma das mais marcantes é que as funções cosseno e seno complexas são ilimitadas, ao contrátrio das funções cosseno e seno reais que cumprem a condição $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ e $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$ para todo x real. Por exemplo, $\cos i = 1,5431$, onde $i = \sqrt{-1}$, o que pode ser verificado fazendo $z = i$ em $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, conforme ilustramos a seguir:

$$\cos(i) = \frac{e^{i.i} + e^{-i.i}}{2} = \frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} = 1,5431$$

Assim, no campo dos números complexos, a equação $\operatorname{sen}(z) = 5$ possui solução. Vejamos:

$$\operatorname{sen}(z) = 5 \Rightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 5 \Rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 10i \Rightarrow$$

$$e^{iz} - \frac{1}{e^{iz}} - 10i = 0 \Rightarrow e^{2iz} + 10ie^{iz} - 1 = 0 \Rightarrow \left(e^{iz}\right)^2 + 10i\left(e^{iz}\right) - 1 = 0$$

que é uma equação quadrática em e^{iz}. Resolvendo essa equação obtemos:

$$e^{iz} = \frac{10i \pm \sqrt{-96}}{2} = 5i \pm 2\sqrt{6}i = \left(5 \pm 2\sqrt{6}\right)i$$

Assim,

$$e^{iz} = \left(5 + 2\sqrt{6}\right)i \Rightarrow iz = \ell n\left(5i + 2\sqrt{6}i\right) \Rightarrow z = -i.\ell n\left(5i + 2\sqrt{6}i\right)$$

Como $\left(5 + 2\sqrt{6}\right)i$ é um número imaginário puro e $5+2\sqrt{6} > 0$, segue que $\arg\left[\left(5 + 2\sqrt{6}\right)i\right] = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, logo

$$z = -i.\ell n\left(5i + 2\sqrt{6}i\right) = -i\left[\ell n\left(5 + 2\sqrt{6}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right] = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - i.\ell n\left(5 + 2\sqrt{6}\right)$$

onde $k \in \mathbb{Z}$. Procedendo de modo análogo, segue que:

$$e^{iz} = \left(5 - 2\sqrt{6}\right) i \Rightarrow iz = \ell n \left(5 - 2\sqrt{6}\right) i \Rightarrow$$

$$z = -i.\ell n \left(5 - 2\sqrt{6}\right) i = \frac{(4k+1)\,\pi}{2} - i.\ell n \left(5 - 2\sqrt{6}\right)$$

onde $k \in \mathbb{Z}$. O que nos mostra que, no campo dos números complexos, a equação $sen(z) = 5$ possui infinitas soluções.

Para finalizarmos vamos analizar a equação $1^x = 3$. Evidentemente que no campo dos números reais a equação $1^x = 3$ não possui solução, visto que $1^x = 1$ para todo x real. Já no campo dos números complexos podemos proceder da seguinte forma: fazendo $\theta = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, na fórmula de Euler $e^{i\theta} = cos\theta + i.sen\theta$, obtemos

$$e^{i2k\pi} = cos2k\pi + isen2k\pi = 1 + i.0 = 1$$

portanto,

$$1^z = 3 \Rightarrow \left(e^{i2k\pi}\right)^z = e^{\ell n3} \Rightarrow$$

$$e^{2k\pi iz} = e^{\ell n3} \Rightarrow$$

$$2k\pi iz = \ell n3 \Rightarrow$$

$$z = \frac{\ell n3}{2k\pi i} \Rightarrow$$

$$z = -\frac{\ell n3}{2k\pi} i, \quad \text{com} \quad k \in \mathbb{Z}$$

o que nos mostra que a equação $1^z = 3$ possui infinitas soluções no campo dos números complexos. Surpreendente, não?!

4 Referências

[1] Posamentier, Alfred - The Art of Problem Solving, Corwin press.
[2] Maor, Eli - Trigonometric Deligths, Princeton Universit Press.
[3] Zill, Dennis G - Curso Introdutório deà análise Complexa com Aplicações, LTC.
[4] RPM 77 - Revista do Professor de Matemática, SBM.