

Olimpíada de Matemática do Estado do Rio Grande do Norte

Coletânea de Problemas para Treinamento N° 08/2010

Nível III

Problema 1

- (a) Diga, justificando, se é possível efetuar uma pesagem de um objeto de 200 gramas usando apenas um peso de 1 grama, um de 3 gramas, um de 9 gramas, um de 27 gramas, um de 81 gramas e um de 343 gramas, usando todos os pesos.
- (b) Diga, justificando, se é possível efetuar uma pesagem de um objeto pesando K gramas, sendo K um número natural qualquer, usando apenas um peso de 1 grama, um de 3 gramas, um de 3^2 gramas, um de 3^3 gramas, um de 3^4 gramas etc.

Problema 2

Um estudante pede para você escolher, sem dizer a ele qual é, um número inteiro de 1 a 9 e fala para você multiplicar esse número por 109. Em seguida, pede para você falar qual é a soma dos dígitos do produto. Sabendo qual é a soma dos dígitos do produto, o estudante descobre qual foi o número que você escolheu.

Explique porque o estudante pode fazer isto.

Problema 3

Encontre quatro números primos menores do que 100 que são divisores do número natural $3^{32} - 2^{32}$.

Problema 4

Seja n um número inteiro. Mostre que, se $2 + 2\sqrt{1 + 12n^2}$ é um número inteiro, então ele é um quadrado perfeito.

Problema 5

Seja n um número inteiro positivo. Prove que o número $n(n+1)(n+2)$ não é um quadrado perfeito.

Problema 6

- (a) Um estudante observou o seguinte padrão

Linha 1	$0.2 + 1 = 1$
Linha 2	$1.3 + 1 = 4$
Linha 3	$2.4 + 1 = 9$
Linha 4	$3.5 + 1 = 16$
Linha 5	$4.6 + 1 = 25$
.....
.	.

Como o estudante preencheu a Linha 100?

(b) No modelo baixo, como você preencheria a Linha 99?

- Linha 1 $0.1.2.3 + 1 = 1^2$
- Linha 2 $1.2.3.4 + 1 = 5^2$
- Linha 3 $2.3.4.5 + 1 = 11^2$
- Linha 4 $3.4.5.6 + 1 = 19^2$
- Linha 5 $4.5.6.7 + 1 = 29^2$
- Linha 6 $5.6.7.8 + 1 = 41^2$
-

Problema 7

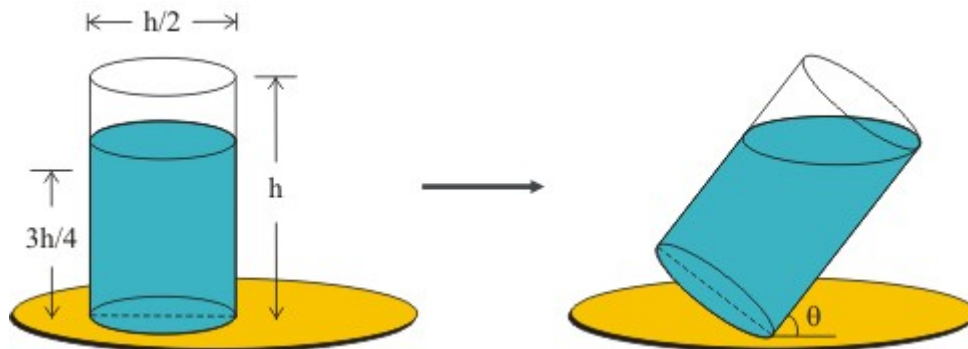
Encontre o maior múltiplo de 8 com todos os dígitos distintos.

Problema 8

Seja $S = \{1, 5, 15, 34, 65, 111, \dots\}$. Encontre a soma dos primeiros 20 elementos de S .

Problema 9

Um copo cilíndrico de altura h e diâmetro $\frac{h}{2}$ tem água até uma altura $\frac{3h}{4}$. Calcular o ângulo de inclinação do copo, com relação a horizontal, de modo que a queda d'água seja iminente, veja figura a seguir.



Problema 10

Prove que a média aritmética dos números $2\text{sen } 2^\circ, 4\text{sen } 4^\circ, 6\text{sen } 6^\circ, \dots, 180\text{sen } 180^\circ$ é igual a $\text{cotg } 1^\circ$.

Problema 11

Um tabuleiro $n \times n$ é preenchido com peças brancas e pretas, de acordo com as seguintes regras:

- (i) Inicialmente (i. e. tabuleiro vazio), uma peça preta é colocada sobre uma casa qualquer;
- (ii) nos movimentos posteriores, uma peça branca é colocada em uma casa vazia e todas as peças, se houver alguma, situadas em casas vizinhas (i. e. com aresta comum) são trocadas por peças de cor oposta.

Este processo se prolonga até o tabuleiro estar completamente preenchido.
Prove que, ao final do processo, restará pelo menos uma peça preta sobre o tabuleiro.