

Olimpíada de Matemática do Estado do Rio Grande do Norte

Lista de Exercícios para treinamento N° 03/2010

Nível III

Problema 1

Escreve-se em ordem crescente todos os inteiros positivos que podem ser expressos como soma de 21 inteiros consecutivos, não necessariamente positivos.

O vigésimo primeiro número nesta lista é igual a

- (a) 21 (b) 231 (c) 441 (d) 431 (e) 241

Problema 2

No aniversário de Bárbara, Alberto convida sua amiga para disputar um jogo. São escritos no quadro-negro os números: 0, 1, 2, 3, ..., 1023, 1024. Bárbara começa. Na sua primeira jogada ela apaga 2^9 desses números. Em seguida, Alberto apaga 2^8 dos números restantes. Bárbara, apaga 2^7 dos restantes, e assim por diante, até que só restam dois números a e b . Então Alberto dá para Bárbara $|a - b|$ reais.

Encontre a menor quantia em reais que Bárbara tem certeza que ganha, independente de como Alberto Joga.

- (a) 1000 (b) 3 (c) 8 (d) 512 (e) 16

Problema 3

A soma de todos os inteiros positivos, n , para os quais $2009^2 + n^2$ é o quadrado de um inteiro positivo é igual a

- (a) 2009 (b) 1998 (c) 2009^2 (d) 1198 (e) 4018

Problema 4

Uma função, f , é tal que para cada inteiro n , temos $f(n + 1) = \frac{f(n)}{1 + af(n)}$, onde a é um número real.

Sabendo que $f(1) = 1$, $f(x) = \frac{1}{2009}$, podemos concluir que o valor de a é

- (a) 0 (b) 251 (c) 1 (d) 287 (e) 41

Problema 5

Um cubo $3 \times 3 \times 3$ é formado juntando cubos unitários. O número de cubos contidos nesse cubo e que tem as medidas das arestas sendo um número inteiro é igual a

- (a) 36 (b) 8 (c) 45 (d) 44 (e) 35

Problema 6

O número de soluções inteiras e positivas da equação $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$ é igual a

- (a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

Problema 7

O menor valor possível da expressão $E = x^2 + y^2$, com x, y números reais satisfazendo a equação $xy(x^2 - y^2) = x^2 + y^2$, com $x \neq 0$, é

- (a) 0 (b) 2 (c) 4 (d) 9 (e) 5

Problema 8

Escreve-se, em ordem crescente, para cada inteiro positivo n , os múltiplos positivos de n , de n até n^2 . Ou seja, escreve-se: 1, 2, 4, 3, 6, 9, 4, 8, 12, 16, 5, 10, 15, 20, 25, 6, 12, 18, 24,

O número de ordem 2009 nesta sequência é

- (a) 2010 (b) 3969 (c) 2016 (d) 4032 (e) 3528

Gabarito

1	c
2	Tente fazer alguns exemplos, imaginando que o conjunto vai de 0 até 16; de 0 até 64; de 0 até 256. Observe que Bárbara está interessada em dois números que estejam mais afastados possíveis, para que a diferença $a - b$ seja a maior possível.
3	d
4	b
5	a
6	d
7	c
8	e