**OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE**

**LISTA DE PROBLEMAS PARA TREINAMENTO Nº 06 – 2011 – Nível III**

**Problem 1** (Adaptado de Olimpiada de Matemática do Vietnam 1991)

Um grupo de 2187 estudantes senta-se formando um círculo. Um estudante, que chamamos de A, começa falando em voz alta o número 1, os dois seguintes, no sentido horário, falam em voz alta o número 2 e 3, e o processo se repete, no mesmo sentido, com os demais estudantes falando 1, 2 e 3; 1, 2 e 3 etc. Cada vez que um estudante fala o número 2 ou 3, ele deixa o círculo. Depois da primeira volta, o processo continua com os que sobraram, e assim por diante, até que reste um único estudante no círculo.

(a) Determine qual é o último estudante a ficar no círculo.
(b) Resolva o mesmo problema, sabendo que inicialmente tem-se 2011 estudantes.

Resp. (a) O estudante A.

(b) O estudante de número 1924 contado, no sentido horário, a partir de A.

**Problema 2** (Adaptado de Olimpiada de Matemática do Vietnam 2004)

Encontre o menor inteiro positivo $k$ para o qual todo subconjunto S de {1, 2, 3, ...16} com $k$ elementos, existem dois elementos distintos $a, b \in S$ tais que $a^2 + b^2$ é primo.

Resp. 9

**Problema 3** (Adaptado de Olimpiada de Matemática do Vietnam 2006)

Seja S um conjunto consistindo de 2011 inteiros. Um subconjunto T de S possui a seguinte propriedade: para quaisquer dois elementos em T (não necessariamente distintos) a soma deles não está em T.

Prove que: se S = {1, 2, 3, ..., 2011}, então T possui no máximo 1006 elementos.

**Problema 4** (Olimpíada Argentina de Matemática – Certame Intercolegial 2011)
Um professor aplicou uma prova para seus 36 alunos, que obtiveram uma média de 13 pontos. A média obtida pelos 15 primeiros alunos da lista foi de 11 pontos e a média dos últimos 18 foi de 15 pontos.

Se as notas obtidas pelos três alunos restantes são três números inteiros consecutivos, calcular essas notas.

**Problema 5** (Olimpíada Argentina de Matemática – Certame Intercolegial - 2011)
Gastão quer numerar as páginas de um caderno. Para isso, possui uma grande quantidade de adesivos com os dígitos 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, mas só tem 22 com o dígito 2.

Determine até que página ele pode numerar.

**Problema 6** (Olimpíada Argentina de Matemática – Certame Intercolegial - 2011)
Franco prestou um exame de três partes, uma de 40 questões, a seguinte com 30 questões e a terceira com 90 questões. Na primeira parte, resolveu corretamente 50 % das 40 questões, na segunda respondeu corretamente 60 % das 30 questões e na última, respondeu corretamente 80 % das 90 questões.

Calcular que percentagem de respostas corretas obteve Franco no exame todo.

**Problema 7** (Olimpíada Argentina de Matemática – Certame Intercolegial - 2011)
Numa caixa há 250 bolinhas azuis e 220 bolinhas vermelhas. Fora da caixa há muitas bolas com essas mesmas cores. Contamos 1 (um) movimento cada vez que retiramos uma bolinha da caixa ou cada vez que acrescentamos uma bolinha à caixa.

(a) Determine a menor quantidade de movimentos que temos que fazer para que a fração entre a quantidade de bolinhas azuis na caixa e a quantidade de bolinhas vermelhas na caixa seja igual a $\frac{4}{3}$.
(b) Dê a quantidade de bolinhas de cada cor que restou em cada caixa.

**Problema 8** (Olimpíada Argentina de Matemática – Certame Intercolegial - 2011)
Em uma base de numeração desconhecida, a seguinte expressão é verdadeira: $15^2 = 321$.

Escreva 2011 nessa base.

**Problema 9** (Adaptado da Olimpíada de Matemática da Estônia 2009)
Os vértices de um polígono regular de *n* lados são $A_1, A_2, \ldots A_n$. Inicialmente, há três formigas no vértice $A_1$. A cada minuto duas delas se movem, simultaneamente, para um vértice vizinho, em direções diferentes (uma no sentido horário e a outra no sentido anti-horário), enquanto a terceira formiga fica parada.
Para quais valores de *n* é possível acontecer que depois de algum tempo todas as formigas se encontrem num outro vértice, diferente de $A_1$?

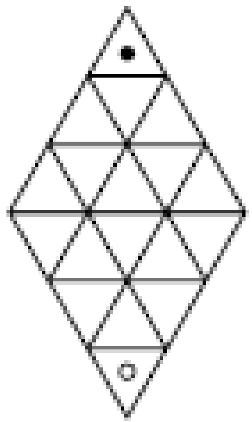
Resposta: Se *n* é divisível por 3.

**Problema 10** (Adaptado da Olimpíada de Matemática da Estônia 2009)
Um inteiro positivo *m* (na base 10) é chamado de *mágico* se a soma de seus dígitos é igual ao produto de seus dígitos.

(a) Prove que: para cada $n$ pertencente ao conjunto {1, 2, ...., 10}, existe um inteiro positivo *mágico* tal que possui exatamente $n$ dígitos.
(b) Prove que existem infinitos inteiros positivos *mágicos*.

**Problema 11** (Adaptado da Olimpíada de Matemática da Estônia 2009)

Juku e Miku disputam um jogo num losango de lado com comprimento $n$, consistindo de dois triângulos equiláteros divididos com uma malha de lado de comprimento 1. Veja figura ao lado para o caso $n$ = 3. Cada jogador possui um símbolo. No início do jogo, um símbolo está numa casa na parte mais alta da malha e o outro, numa casa na parte mais baixa. Eles jogam alternadamente. Cada jogada consiste em mover o respectivo símbolo para uma casa adjacente. Duas casas são adjacentes se possuem um lado em comum.
Um jogador vence o jogo se ele consegue, com seu símbolo, capturar o símbolo do adversário, movendo seu símbolo para a mesma casa em que está o símbolo do adversário, ou alcançando a casa de partida de seu oponente.
Juku inicia o jogo.



Quais dos jogadores possui uma estratégia para vencer o jogo?