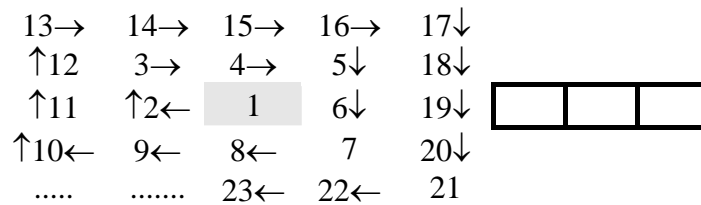




OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE
LISTA DE PROBLEMAS PARA TREINAMENTO - 2008
NÍVEL III

- 1) Tem-se 11 palitos de fósforos de um mesmo comprimento. Com 9 deles forma-se um triângulo de lados 2, 3 e 4.
 Explique como dividir a área do triângulo ao meio usando os dois palitos restantes.
- 2) (a) O número ímpar 7 pode ser expresso como uma diferença de dois quadrados: $16 - 9 = 4^2 - 3^2$.
 Expresse os números 17 e 83 como diferença de dois números quadrados.
 (b) Demonstre que todo número ímpar, $2n + 1$, pode ser expresso como uma diferença de dois quadrados.
 (c) Diga, justificando, quais números pares podem ser expressos como diferença de dois quadrados.
- 3) (a) Na espiral de números inteiros mostrada abaixo, escreva os próximos três números situados à direita de 11, 2, 6, 19.



- (b) Na espiral de números mostrada acima, escreva uma fórmula geral para os números da seqüência 1, 6, 19,, que aparece como parte da terceira linha.
- 4) Considere a seqüência $a_n = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}$, com n um número natural.
 Prove que $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{20}}$ é um número inteiro.
- 5) Seja $A = \{1, 3, 5, \dots, 59\}$. Mostre que A não pode ser partido em 12 subconjuntos, de modo que a soma dos elementos de cada um deles seja a mesma.
- 6) Encontre todos os inteiros positivos n para os quais o conjunto

$$A = \{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}$$

pode ser partido em 12 subconjuntos, de modo que a soma dos elementos de cada um deles seja a mesma.

- 7) Um tabuleiro $(2m + 1) \times (2n + 1)$ é pintado com duas cores. Um quadrado unitário do tabuleiro é chamado *linha-dominante* se existe no mínimo $(n + 1)$ quadrados unitários de sua cor naquela linha. Defina um quadrado unitário *coluna-dominante* de maneira análoga. Prove que existe no mínimo $m + n + 1$ quadrados ao mesmo tempo linha-dominante e coluna-dominante.