OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE
LISTA DE PROBLEMAS PARA TREINAMENTO - 2008
NÍVEIL III

1) Tem-se 11 palitos de fósforos de um mesmo comprimento. Com 9 deles forma-se um triângulo de lados 2, 3 e 4.
Explique como dividir a área do triângulo ao meio usando os dois palitos restantes.

2) (a) O número ímpar 7 pode ser expresso como uma diferença de dois quadrados: $16 – 9 = 4^2 – 3^2$.
Expresse os números 17 e 83 como diferença de dois números quadrados.
(b) Demonstre que todo número ímpar, $2n + 1$, pode ser expresso como uma diferença de dois quadrados.
(c) Diga, justificando, quais números pares podem ser expressos como diferença de dois quadrados.

3) (a) Na espiral de números inteiros mostrada abaixo, escreva os próximos três números situados à direita de 11, 2, 6, 19.

13→	14→	15→	16→	17↓
↑12	3→	4→	5↓	18↓
↑11	↑2←	1	6↓	19↓
↑10←	9←	8←	7	20↓
.....	....	23←	22←	21

(b) Na espiral de números mostrada acima, escreva uma fórmula geral para os números da seqüência 1, 6, 19, ..., que aparece como parte da terceira linha.

4) Considere a seqüência $a_n = \sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}$, com n um número natural.
Prove que $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{20}}$ é um número inteiro.

5) Seja $A = \{1, 3, 5, ..., 59\}$. Mostre que A não pode ser partido em 12 subconjuntos, de modo que a soma dos elementos de cada um deles seja a mesma.

6) Encontre todos os inteiros positivos n para os quais o conjunto

$$A = \{1, 3, 5, ..., 2n - 1\}$$

pode ser partido em 12 subconjuntos, de modo que a soma dos elementos de cada um deles seja a mesma.

7) Um tabuleiro $(2m + 1) \times (2n + 1)$ é pintado com duas cores. Um quadrado unitário do tabuleiro é chamado *linha-dominante* se existe no mínimo $(n + 1)$ quadrados unitários de sua cor naquela linha. Defina um quadrado unitário *coluna-dominante* de maneira análoga.
Prove que existe no mínimo $m + n + 1$ quadrados ao mesmo tempo linha-dominante e coluna-dominante.