
Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmata@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

LISTA SEMANAL No. 10 - Data 13/05/2013

NÍVEL I

Annie possui R\$500,00 na sua conta bancária. O banco permite somente duas espécies de operações: retirada de exatos R\$300,00 ou depósitos de exatos R\$198,00. Annie não tem outros recursos, a não ser o que está na sua conta.

Qual é a maior quantia que Annie pode sacar de sua conta?

NÍVEL II

Escrevem-se dois números no quadro-negro de um laboratório. Todo dia, ao meio-dia, um pesquisador apaga os dois números e os substitui pela suas médias aritmética e harmônica. Os números escritos na manhã do primeiro dia foram 1 e 2.

Encontre o produto de todos os números escritos no quadro-negro no final do 2013-ésimo dia.

Observação: A Média Aritmética e a Média Harmônica de dois números a e b são $\frac{a+b}{2}$ e $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, respectivamente.

NÍVEL III

Traçando raios, divide-se um disco em $2n$ setores circulares, n deles são pintados de azul e n pintados de vermelho. Escolhe-se dois desses setores circulares, um azul e um vermelho. Começando com o setor circular azul escolhido, numera-se de 1 a n , no sentido anti-horário, os setores circulares azuis. De maneira análoga, começando com o setor circular vermelho escolhido, numera-se de 1 a n , no sentido anti-horário, os setores circulares vermelhos.

Prove que, independente da escolha da cor dos setores circulares, existe uma metade do disco que possui todos os números de 1 até n .

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Para cada $x \in \mathbb{R}$ definimos

$$g(x) = f(x) \int_0^x f(t) dt.$$

Mostre que se a função g não é crescente, então f é identicamente nula.