NOTAS DE AULA

NOÇÕES SOBRE O PROCESSO E O MÉTODO DE INDUÇÃO

(Versão 23/03/2012)

Por

Benedito Tadeu Vasconcelos Freire - UFRN

Noções sobre o processo e o método de indução

Apresentação

Nestas Notas de Aula introduziremos noções sobre o processo e o método de indução, uma importante técnica usada para provar resultados em Matemática. A ideia é que o leitor possa estudar sozinho. Para isso, apresentamos muitos exemplos e propomos problemas, uma boa parte deles com respostas.

Ao ler, tente entender tudo que está sendo explicado nas notas de aula. Estude com caneta e papel ao lado. Seja paciente e procure ter certeza de que você entendeu o que (e por que) está fazendo.

Objetivos

- Compreender a essência do processo indutivo.
- Usar o Princípio da Indução para provar a validade de certas fórmulas envolvendo números naturais.

O processo e o método indutivo

Em muitos problemas de Matemática, precisamos verificar a veracidade de uma afirmação, A(n), que depende de um número natural n. Se a afirmação A(n) é de fato verdadeira, usamos o método de indução para facilitar a sua prova. Os historiadores da Matemática têm opiniões diferentes sobre quem primeiro formulou o Princípio da Indução Matemática. Mas, é certo que os matemáticos da antiga Grécia usaram argumentos indutivos, basta ver o Teorema IX-20 em *Os Elementos,* de Euclides, onde ele prova a existência de infinitos números primos.

Atenção: ao longo de todas estas Notas de Aula, a letra maiúscula **N** denotará o conjunto dos números naturais:

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots, n, \ldots\ldots\ldots\}.$$

A letra maiúscula **Z** denotará o conjunto dos números inteiros:

Z = {...., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}

Euclides de Alexandria (360 a.C. — 295 a.C.) foi um professor, matemático e escritor. Teria sido educado em Atenas e freqüentado a Academia de Platão, em pleno florescimento da cultura helenística.

Convidado por Ptolomeu I para compor o quadro de professores da recém fundada Academia, que tornaria Alexandria o centro do saber da época, tornou-se o mais importante autor de matemática da Antiguidade greco-romana e talvez de todos os tempos, com seu monumental Stoichia (**Os elementos**, 300 a.C.), uma obra em treze volumes, sendo cinco sobre geometria plana, três sobre números, um sobre a teoria das proporções, um sobre incomensuráveis e os três últimos sobre geometria no espaço. Escrita em grego, a obra cobria toda a aritmética, a álgebra e a geometria conhecidas até então no mundo grego, reunindo o trabalho de seus predecessores, como Hipócrates e Eudóxio, e sistematizava todo o conhecimento geométrico dos antigos e intercalava os teoremas já conhecidos então com a demonstração de muitos outros, que completavam lacunas e davam coerência e encadeamento lógico ao sistema por ele criado. Após sua primeira edição foi copiado e recopiado inúmeras vezes e, versado para o árabe, tornou-se o mais influente texto científico de todos os tempos e um dos com maior número de publicações ao longo da história. Depois da queda do Império Romano, os seus livros foram recuperados para a sociedade européia pelos estudiosos árabes da península Ibérica. Escreveu ainda Óptica (295 a.C.), sobre a óptica da visão e sobre astrologia, astronomia, música e mecânica, além de outros livros sobre matemática. Entre eles citam-se Lugares de superfície, Pseudaria e Porismas.

Algumas das suas obras, como Os elementos, Os dados, outro livro de texto, uma espécie de manual de tabelas de uso interno na Academia e complemento dos seis primeiros volumes de Os Elementos, Divisão de figuras, sobre a divisão geométrica de figuras planas, Os Fenômenos, sobre astronomia, e Óptica, sobre a visão, sobreviveram parcialmente e hoje são, depois de A Esfera de Autólico, os mais antigos tratados científicos gregos existentes. Pela sua maneira de expor nos escritos deduz-se que tenha sido um habilíssimo professor.

(Fonte: WIKIPÉDIA, 2008, extraído da Internet).

Alguns historiadores argumentam que a formulação precisa do método e do processo de indução deveu-se a Jacob Bernoulli (1654-1705) e Blaise Pascal (1623 - 1662). Em 1889, quando estudava os números naturais, Giuseppe Peano (1858—1932) introduziu o Princípio da Indução Matemática como um dos axiomas dos números naturais.

Em que consiste o método de indução matemática?

A prova por indução pode ser pensada como a brincadeira de arrumar dominós em fila e derrubá-los como uma onda: derrubamos a primeira peça, que ao cair bate na segunda, que ao cair bate na terceira e assim por diante, até que todas elas estejam tombadas, conforme mostra a Figura 1.

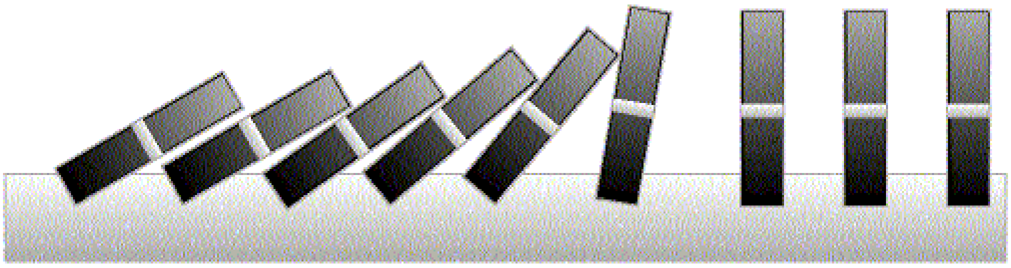

Figura 1 – Dominós caindo como uma onda

Agora, em vez de peças de dominós, pense numa seqüência de afirmações A (1), A (2), A (3), ..., A(n), ... Imagine que seja possível provar as duas etapas seguintes:

(i) a primeira afirmação, A (1), seja verdadeira;

(ii) sempre que uma afirmação for verdadeira, a imediatamente seguinte também seja verdadeira.

Concluímos que todas as afirmações A (1), A (2), A (3), ..., A(n), ... são verdadeiras.

Relacionando com as peças de dominó, (i) seria a derrubada da primeira peça, (ii) seria a queda de uma peça de dominó provocada pela queda da peça anterior.

A parte (i) é chamada a **base da indução** e (ii) é a **etapa indutiva**.

Exemplo 1 (A soma dos primeiros *n* números naturais)

Vamos provar, usando indução, que para todo número natural *n*, temos:

$$1+2+3+4+....+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Solução

Observe que a afirmação A(*n)* a ser provada é: $1+2+3+4+....+n=\frac{n(n+1)}{2}$, para cada número natural *n*.

Assim, A (1) será entendida como a afirmação: $1=\frac{1.(1+1)}{2}$;

A (2) : $1+2=\dfrac{2(2+1)}{2}$;

A (3): $1+2+3=\dfrac{3(3+1)}{2}$, e assim por diante.

Etapa 1 – Vamos verificar a base da indução. Isto é, (i), que é o mesmo que verificar que A (1) é verdadeira. Para isso, basta observar que: $1=\dfrac{1.(1+1)}{2}$.

Etapa 2 – Vamos supor que para *n* = *k*, onde *k* um número natural maior do que ou igual a 1, a fórmula dada seja verdadeira. Isto é, $1+2+3+4+...+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$. Agora, provaremos que para *n* = *k* +1 a igualdade também se verifica. De fato, somando *k* + 1 em ambos os membros da expressão anterior, obtém-se

$1+2+3+4+....+k+(k+1)=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)=$

$=(k+1).(\dfrac{k}{2}+1)=(k+1).(\dfrac{k+2)}{2})=(k+1).\dfrac{[(k+1)+1]}{2}$, que é o resultado $\dfrac{n(n+1)}{2}$ para *n* = k +1. Portanto, pelo Princípio da Indução, completamos a prova.

Exemplo 2 (A soma dos quadrados dos primeiros *n* números naturais)

Vamos provar por indução que, para todo número natural *n*, temos:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Solução

A afirmação, A(*n)*, a ser provada é: $1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para todo número natural *n.*

Assim, A (1) será entendida como a afirmação $\dfrac{1(1+1)(2.1+1)}{6}=1^2=1$;

A (2): $1^2+2^2=\dfrac{2(2+1)(2.2+1)}{6}=\dfrac{2.3.5}{6}=5$;

A (3): $1^2+2^2+3^2=\dfrac{3(3+1)(2.3+1)}{6}=14$ e assim por diante.

Etapa 1 – Vai verificar a base da indução, isto é, (i). Para isso, basta observar que: $\dfrac{1(1+1)(2.1+1)}{6}=1^2=1$.

Etapa 2 – Vamos supor que para $n = k$, onde k é um número natural maior do que ou igual a 1, a fórmula dada seja verdadeira. Isto é, $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ para todo número natural k.

Agora, provaremos que para $n = k + 1$ a igualdade também se verifica. De fato, somando $(k+1)^2$ em ambos os membros da igualdade anterior, obtém-se:

$= (k+1)\left[\frac{2k^2 + k + 6k + 6}{6}\right] = (k+1).\left[\frac{2k^2 + 7k + 6}{6}\right] = \frac{(k+1)((k+2)[2(k+1)+1]}{6}$, esta é a expressão $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ quando $n = k + 1$, o que completa a prova.

Exercício 1

Descubra o erro na demonstração, por indução, do seguinte resultado:

Proposição - Todos os objetos possuem a mesma cor.

Demonstração

O caso n = 1 é óbvio (numa coleção consistindo de um único objeto, existe uma única cor a ser observada). Assumindo, por hipótese, que em qualquer coleção de k objetos todos têm a mesma cor, então, segue que toda coleção de k + 1 objetos será formada totalmente por elementos monocromáticos. De fato, se retirarmos um objeto de uma coleção de k + 1 objetos, os k restantes serão todos da mesma cor (pela hipótese). Agora, se colocamos de volta o que foi retirado e retiramos outro qualquer, então, (novamente) pela hipótese de indução, ele tem a mesma cor dos objetos restantes e, com isso, concluímos que todos os objetos possuem a mesma cor.

Exemplo 3 (A soma dos cubos dos primeiros *n* números naturais)

Vamos provar por indução que, para todo número natural *n*, *temos:*

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Solução

A afirmação, A(*n*), a ser provada é: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ para todo número natural *n*.

Assim, A (1) será entendida como a afirmação $1 = \left[\frac{1.(1+1)}{2}\right]^2$;

A (2): $1^3 + 2^3 = \left[\frac{2(2+1)}{2}\right]^2$;

A (3) : $1^3 + 2^3 + 3^3 = \left[\frac{3(3+1)}{2}\right]^2$, e assim por diante.

Etapa 1 – Vamos verificar a base da indução. Isto é, (i). Assim, vamos verificar que é verdadeira. Para isso, basta observar que: $1^3 = \left[\frac{1.(1+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{2}{2}\right]^2 = 1$.

Etapa 2 – Vamos supor que para $n = k$, onde k é um número natural maior do que ou igual a 1, a fórmula dada seja verdadeira. Isto é, $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$, para todo número natural k.

Agora, provaremos que para $n = k + 1$ a igualdade também se verifica. De fato,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2\left[\frac{k^2}{4} + (k+1)\right] =$$

$$= (k+1)^2\left[\frac{k^2 + 4k + 4}{4}\right] = (k+1)^2.\left[\frac{k+2}{2}\right]^2 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$, que é a fórmula $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ para $n = k + 1$, o que completa a prova.

Observe que, pelo exemplo 1, temos $1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Agora, o exemplo 2, curiosamente, nos permite concluir que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = (1 + 2 + 3 + 4 + ... + n)^2,$$

um resultado, convenhamos, surpreendente!

Exercício 2

Prove, por indução, que para todo número natural n, vale as seguintes igualdades:

(a) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{(n-1).n} = \frac{n-1}{n}$

(b) $1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$

(c) $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)...\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$

(d) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{2n}$.

A Torre de Hanói

A Torre de Hanói é um quebra-cabeça que foi apresentado em 1883 por Édouard Lucas (1842-1891), um professor do Lycées Saint-Louis, na França, no seu livro *Récréations Mathématiques*, volume III, p. 56. Lucas anexou ao seu brinquedo uma lenda romântica sobre uma torre, a Torre de Brama, que supostamente tem 64 discos de ouro empilhados em três agulhas de diamantes:

"No início dos tempos", ele disse, "Deus colocou estes discos de ouro na primeira agulha e mandou um grupo de sacerdotes transferir para a terceira agulha, movendo apenas um disco de cada vez e sem colocar um disco maior em cima de um menor. Os sacerdotes, ao que se saiba, trabalham dia e noite nesta tarefa. Quando eles terminarem, a Torre ruirá e o mundo irá acabar".

A primeira solução do problema da Torre de Hanói apareceu na literatura matemática em 1884, num artigo de Allardice e Farser, La Tour d'Hanoi publicado em *Proc. Edinburgh Math. Soc*., v. 2, p. 50 – 53, 1884.

A seguir, enunciamos o problema da Torre de Hanói de forma mais geral.

Exemplo 4 (A Torre de Hanói)

É dada uma torre com n discos, inicialmente empilhados por tamanhos decrescentes em um dos três pinos dados, conforme Figura 2. O objetivo é transferir a torre inteira para um dos outros pinos, movendo apenas um disco de cada vez e sem colocar um disco maior em cima de um menor.

a) Determine a menor quantidade de movimentos necessários para transferir todos os discos de um dos pinos para outro.

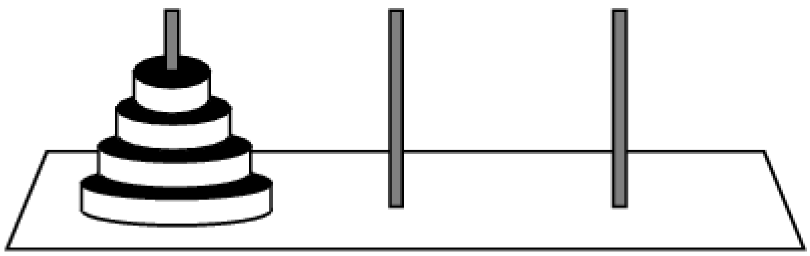

Figura 2 - A Torre de Hanói

b) **Mais precisamente**: prove que podemos realizar a transferência dos *n* discos, de acordo com as regras de Édouard Lucas, com, no mínimo, $2^n - 1$ movimentos.

Solução

a) Na nossa notação anterior, a afirmação, A(n), a ser provada é: "a menor quantidade de movimentos para transferir os *n* discos é igual a $2^n - 1$".

Assim, A (1) será entendida como a afirmação: "A quantidade mínima de movimentos para transferir um disco é igual a $2^1 - 1 = 1$";
A (2): a menor quantidade de movimentos para transferir dois discos é igual a $2^2 - 1$;
A (3): a menor quantidade de movimentos para transferir três discos é igual a $2^3 - 1$, e assim por diante.

Etapa 1 – Vamos verificar a base da indução. Ou seja, vamos verificar que A (1) é verdadeira. Para isso, observe que, para transferir um só disco, basta um único movimento. Nesse caso, $1 = 2^1 - 1$ e a fórmula se verifica.

Etapa 2 – Vamos supor que para $n = k$, onde k é o número de discos, a menor quantidade de movimentos para realizar a transferência seja $2^k - 1$. Naturalmente, k é um número natural maior do que ou igual a 1.

b) Agora, provaremos que, para $n = k + 1$ discos, o número mínimo de movimentos que realizam a transferência é dado por $2^{n+1} - 1$.
De fato, se temos $(k + 1)$ discos, podemos pensar em dois blocos de discos: um bloco com k discos, contendo todos os discos, com exceção do disco maior, que está embaixo da pilha, e outro, só com o disco maior. Pela hipótese de indução, podemos transferir os k primeiros discos com, no mínimo, $2^k - 1$ movimento. Assim, transferimos o bloco contendo k discos para um dos pinos vazios, realizando $2^k - 1$ movimentos e, em seguida, transferimos o disco maior para o outro pino vazio e, por último, transferimos o bloco dos k discos para o pino em que se encontra o disco maior, com no mínimo $2^k - 1$ movimentos. Em seguida, com um movimento transferimos o disco maior para o outro pino vazio. Portanto, o total mínimo de movimentos realizados foi:

$$(2^k - 1) + 1 + (2^k - 1) = 2.2^k - 1 = 2^{k+1} - 1,$$ o que conclui a prova.

No caso de n = 64 discos, o número mínimo de movimentos será $2^{64} - 1$, necessários antes que o mundo se acabe...
Agora, observe que o número $2^{64} - 1$ é igual a 18.446.744.073.709.551.615.
Se fizermos uma transferência por segundo, 24 horas por dia, durante 365 dias no ano, levaríamos 58.454.204.609 séculos e mais seis anos para terminar o trabalho!

É oportuno observar que a demonstração por indução exige que comprovemos que uma dada afirmação A(n) sobre números naturais seja verdadeira para $n = 1$. E, supondo verdadeira para n = k, possamos, através de meios legítimos, provarmos que ela seja verdadeira para $n = k + 1$. Somente após essas duas etapas, podemos concluir que A(n) é verdadeira para todo número natural n. Os dois exemplos a seguir ilustram bem o teor dessa observação.

Exemplo 5
A expressão $n^2 + n + 41$ representa um número primo para $n = 1, 2, 3, ..., 39$ (verifique essa afirmação, substituindo na expressão dada os valores: $n = 1$, n = 2, ..., n =39). Mas, para n = 40, temos:
$n^2 + n + 41 = 40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 40 \times 41 + 41 = 41 \times 41 = 41^2$, que não é um número primo. Esse cálculo evidencia que a validade para $n = 39$ não implica a validade para $n = 40$. Esse é um exemplo famoso que foi dado por Leonardo Euler.

Exemplo 6

Suponha verdadeira a seguinte afirmação:

A(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$.

Então, a afirmação:

$$A\,(n + 1) = (1 + 2 + 3 + 4 + ... + n) + n + 1 = \frac{(n-1)(n+2)}{2} + n + 1 =$$

$$= \quad \frac{(n-1)(n+2)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n - 2 + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + 3n}{2} = \frac{n(n+3)}{2}$$

é verdadeira. Logo, a veracidade de A(n) implica a de A (n + 1). No entanto, A (1) = 1, enquanto $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ = 0, para n = 1.

Isso nos diz que A (1) não é verdadeira. Portanto, não podemos concluir que A(n) é verdadeira para todo n. Na verdade, como sabemos do exemplo 1,

$1 + 2 + 3 + 4 + ... + n \neq \frac{(n-1)(n+2)}{2}$ e, de fato, $1+2+3+4+....+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercício 3

Para cada uma das proposições, encontre os valores de $n \in \mathbf{N}$ para os quais a proposição é verdadeira, e também o menor valor de $n \in \mathbf{N}$ para o qual a proposição é falsa.

(a) $2^{n-1} \leq n^2$ (b) $n^2 + n + 1$ é um número primo.

É possível demonstrar por indução a validade dessas duas proposições? Justifique.

Exemplo 7 (Jakob Steiner – 1796-1863)

Mostre, usando indução, que o número máximo de regiões definidas por n retas no plano é $L_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$.

Solução

Para n = 1, o plano fica dividido em duas regiões, veja a Figura 3 a seguir.

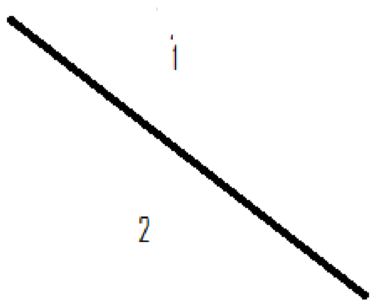

Figura 3 – Reta dividindo o plano em duas regiões

Desse modo, $L_1 = 2 = \frac{1.(1+1)}{2} + 1$. O que mostra que a afirmação é verdadeira para *n* = 1.

Traçando duas retas (não coincidentes), conforme a Figura 4, o plano fica dividido em 4 regiões. A expressão dada é verdadeira: $L_2 = 4 = \frac{2.(2+1)}{2} + 1$.

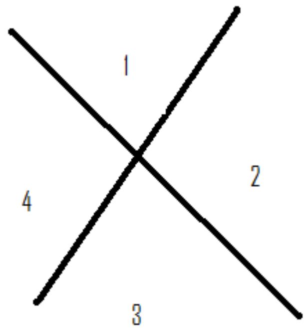

Figura 4 – Duas retas dividindo o plano em quatro regiões

Agora, observe que, traçando uma terceira reta, verificamos que esta divide no máximo três das quatro regiões já existentes, independentemente da posição das duas primeiras retas traçadas, veja a Figura 5 a seguir.

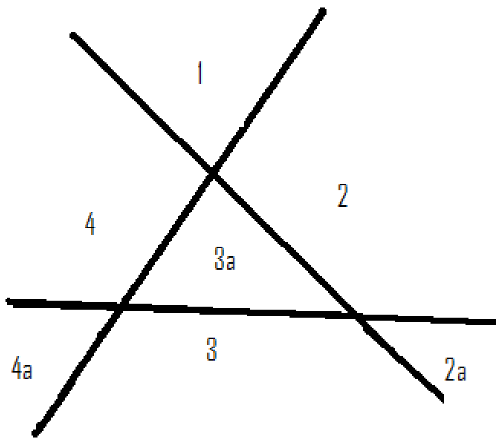

Figura 5 – Três retas dividindo o plano em sete regiões

Desse modo, com n = 3 retas, dividimos o plano em, no máximo, 7 regiões e a fórmula se verifica: $L_3 = 7 = \frac{3.(3+1)}{2} + 1$.

Observe que, $L_2 = L_1 + 2$, $L_3 = L_2 + 3$.

Agora, para $n \geq 1$, a n-ésima reta aumenta o número de regiões do plano de k se, e somente se, essa reta divide k das regiões já existentes. Por outro lado, a n-ésima reta intercepta k regiões já existente se ela intercepta as retas anteriores em k – 1 pontos. Mas, duas retas se interceptam em no máximo um ponto. Portanto, a n-ésima reta só pode interceptar as n - 1 retas anteriores em no máximo n – 1 pontos. Desse modo, como $k \leq n$, $L_n \leq L_{n-1} + n$.

Agora, desenhando a n-ésima reta de tal maneira que ela não seja paralela a nenhuma das outras n - 1 retas e não passe por nenhum dos pontos de interseção já existentes, temos que $L_n = L_{n-1} + n$. Essa igualdade foi verificada acima para n = 2 e n = 3. Observe que o passo da indução de n para n + 1 é dado por:

$L_{n+1} = L_n + (n+1) =$

$$\left[\frac{n(n+1)}{2} + 1\right] + (n+1) = \left[\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\right] + 1 = (n+1)\left[\frac{n}{2} + 1\right] + 1 = \frac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]}{2} + 1$$

Portanto, o número máximo de regiões definidas por n retas no plano é $L_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$, para todo número natural n.

Exemplo 8

Desenha-se n círculos num dado plano. Eles dividem o plano em regiões. Mostre que é possível pintar o plano com duas cores, azul e vermelho, de modo que regiões com fronteira comum tenham cores distintas.

Solução

Se n = 1, então, o plano fica dividido em duas regiões, uma externa ao círculo, que é pintada de azul, e a outra, região interna, pintada de vermelho, veja a Figura 6.

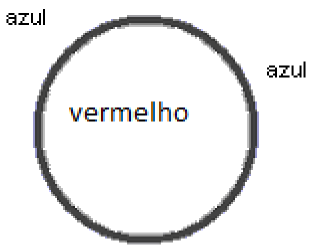

Figura 6 – O plano dividido por um círculo em duas regiões, pintadas com cores distintas.

Se n = 2, é fácil ver que podemos pintar o plano com duas cores, de modo que regiões com fronteira comum tenham cores distintas, veja a Figura 7 a seguir.

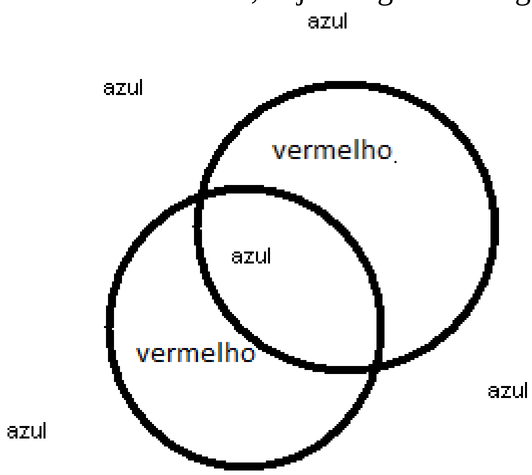

Figura 7 – O plano dividido em três regiões, pintadas de acordo com o problema.

Observe que, para fazer a pintura, no caso, de dois círculos, raciocinamos do seguinte modo: temporariamente, retiramos o segundo círculo e pintamos o plano de acordo com o caso de um único círculo. Agora, recolocamos o segundo círculo, deixando fixa a cor da região externa a ele e mudamos a cor da região comum aos dois círculos, de acordo com a Figura 7.

Vamos supor que, para o caso de *n*, seja possível pintar o plano com duas cores, de modo que regiões com fronteira comum tenham cores distintas. Para o caso de $n + 1$ círculos, raciocinamos como anteriormente. Isto é, removemos temporariamente o (n + 1)-ésimo mais um- círculo. O que sobra está nas condições da hipótese de indução, para o caso de n círculos. Agora, recolocamos o (n + 1)-ésimo círculo e mudamos alternadamente as cores das regiões internas a ele, deixando fixa a cor externa. Desse modo, as cores de regiões adjacentes ficam distintas. Portanto, para todo número natural *n*, é possível pintar o plano com duas cores, de modo que regiões com fronteira comum, determinadas pelos n círculos, tenham cores distintas.

Exercícios

(1) Mostre por indução que, para todo número natural n, temos:

(a) $1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + ... + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(b) $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \dfrac{1}{4.5} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

(2) Usando o Princípio da Indução, mostre que:

(a) $n^3 \geq 3n + 1$, para todo número inteiro maior do que ou igual a 2.
(b) $n^3 \geq 3n^2$, para todo número inteiro maior do que ou igual a 3.
(c) $3^n \geq n^3$, para todo número inteiro positivo.
(d) $|\text{sen. } n\text{os}| \leq n.|\text{sen. x}|$, para todo número real x e todo inteiro positivo n.

(3) Prove, usando indução, que o número de diagonais, d_n, de um polígono convexo de n lados é dado pela expressão: $d_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$, $n \geq 4$.

(4) Prove, usando indução, que a soma, S_n, das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é dado pela expressão: $S_n = (n-2).180^o$, $n \geq 3$

(5) Considere uma Torre de Hanói dupla contendo $2n$ discos de n tamanhos diferentes, dois de cada tamanho. Como é usual, só podemos mover um disco de cada vez, sem colocar um maior sobre um menor.
Qual é o número mínimo de movimentos necessário para transferir a Torre de Hanói dupla, de um pino para outro, se discos de mesmo tamanho são indistinguíveis?

(6) Num país longínquo, a moeda local é o "cruzeiro". Nesse país, um banco tem uma quantidade ilimitada de cédulas de 3 e 5 cruzeiros.
Prove, por indução, que o banco pode pagar uma quantidade qualquer (inteira) de cruzeiros, maior do que sete.

(7) É permitido cortar uma folha de papel em 4 ou 6 pedaços. Prove que, aplicando essa regra, pode-se cortar uma folha de papel num número qualquer de pedaços maior do que 8.

(8) Prove, por indução, que todo número natural n pode ser representado como soma de diferentes potências de 2, que é a expansão de n na base 2.

Resumo

Nesta aula, estudamos o processo e o método de indução, que consiste em provar afirmações envolvendo números naturais. Para tanto, temos que provar que a afirmação é verdadeira para n = 1 e, supondo verdadeira para $n = k$, se pudermos provar que ela é verdadeira para $n = k + 1$, então, ela é verdadeira para todo número natural n.

Problemas Suplementares

Problema 1

Mostre por indução que, para todo número natural n, temos:

(a) $1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + (n-1)^4 = \frac{n^5}{5} - \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$

(b) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}$

(c) $2!.4!.6!...(2n)! \geq \left[(n+1)!\right]^n$

Problema 2

Prove, usando o Princípio da Indução, que todo polígono de n lados (convexo ou não) pode ser repartido em triângulos, traçando diagonais que não se cruzam.

Problema 3

Prove, usando o Princípio da Indução, que todo número inteiro positivo n pode ser escrito como uma soma do tipo $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm .... \pm k^2$ **,** para algum inteiro positivo k e alguma escolha de sinais.

Problema 4

Cada vértice de um polígono convexo de n lados é pintado com uma cor. Para pintar todos os vértices usam-se no mínimo três cores, de tal maneira que vértices consecutivos têm cores distintas.

Prove, por indução, que podemos repartir o polígono em triângulo, usando diagonais que não se interceptam, de modo que os extremos das diagonais sejam pontos de cores distintas.

Problema 5

Numa ilha, cinco piratas dispõem de cem moedas de ouro para repartir entre si. Eles dividem o produto do saque da seguinte forma: o pirata mais velho propõe uma divisão e todos votam sim ou não. Se pelo menos a metade dos piratas vota sim, eles dividem as moedas da forma proposta. Caso contrário, matam o pirata mais velho e começam de novo. Então o pirata mais velho (sobrevivente) faz sua proposta de divisão e os outros votam de acordo com as mesmas regras, ou seja, repartem as moedas ou matam o mais velho, conforme o caso. O processo continua até que um plano seja aceito. Suponha que você é o pirata mais velho.

Que divisão você proporia, sabendo que todos os piratas são lógicos, gananciosos e querem continuar vivos?

Problema 6
O professor de Matemática escreve no quadro negro os números 1, 2, 2^2, 2^3, ..., 2^n e propõe o seguinte desafio. Um estudante pode apagar quaisquer dois dos números escritos e substituí-los pela diferença, tomada sempre maior do que ou igual a zero. Depois que este procedimento for repetido *n* vezes, restará um único número.
Que números podem restar no final dos procedimentos?

Referências

ANDREESCU, Titu; GELCA, Razvan. **Putnam and Beyond**. New York. Springer. 2007.

FERNANDES, Ângela Maria Vidigal et al. **Fundamentos de álgebra**. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2005.

FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia. **Mathematical circle**: Russian experience. Roadiland. American Mathematical Society, 1996.

GRAM, Ronald L.; KNUTH, Ronald E.; PATASHNIK, Oren. **Matémática concreta**: **fundamentos para a ciência da computação**. Rio de Janeiro: LTC, 1995.

HEFEZ, Abramo. **Elementos de aritmética**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

POUNDSTONE, William. **Como mover o Monte Fuji?.** Rio de Janeiro. Ediouro. 2005.

STOROZHEV, Andrei. **International Mathematics Tournament of Towns 1997-2002. Book 5.** Canberra. AMT Publishing. 2006

WIKIPÉDIA. **Euclides**. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Euclides>. Acesso em: 2 dez. 2008.

RESPOSTAS

Exercícios

(5) Sugestão – Inicialmente, pense em mover a torre dupla com (n – 1) discos, depois, mover e inverter a ordem dos dois maiores discos e, finalmente, mover a torre dupla com (n – 1) discos.

(6) Sugestão: faça indução sobre o número de cruzeiros que o banco tem de pagar. Mostre que: se o banco pode pagar k, k +1, k + 2 cruzeiros, então, o banco pode pagar k + 3, k +4, k + 5 cruzeiros.

Problemas Suplementares

(1) (b) **Sugestão:** Para $n=1$ é fácil.
Assumindo que seja verdade para $n=k$, para mostrar que é verdadeiro para $n=k+1$, some a cada membro da desigualdade dada a parcela $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$, obtendo

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\leq 2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Agora, para mostrar que $2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\leq 2\sqrt{k+1}$, multiplique ambos os lados da desigualdade por $\sqrt{k+1}$ e, depois de algumas contas você obterá uma desigualdade que é verdadeira, o que conclui a prova.

(c) **Sugestão:** Supondo o caso $n=k$ verdadeiro, temos que $2!.4!.6!...(2k)!\geq\left[(k+1)!\right]^k$. Agora, multiplique ambos os lados da última desigualdade por $\left[2(k+1)\right]!$, obtendo

$$2!.4!.6!...(2k)!.\left[2(k+1)\right]!\geq\left[(k+1)!\right]^k.\left[2(k+1)\right]!.$$

Para mostrar que o lado direito da desigualdade é maior do que $\left[(k+2)!\right]^{k+1}$, basta observar que $\left[2(k+1)\right]!=(2k+2)!=(2k+2).(2k+1).(2k).(2k-1)....(k+3).(k+2)!$.
Ou seja, $\left[2(k+1)\right]!$ é o produto de k termos todos maiores do que $(k+2)!$, e o fato segue fácil.)

(3) Sugestão: Observe que $1 = 1^2$; $2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$; $3 = -1^2 + 2^2$; $4 = -1^2 - 2^2 + 3^2$. Como para todos n > 4, temos $n^2-(n+1)^2-(n+2)^2+(n+3)^2=4$, a segunda parte da indução é feita mostrando que S(k) implica em S(k + 1), usando a identidade acima.

(4) Sugestão: A base da indução é o caso $n = 3$. Ou seja, quando o polígono for um triângulo, que não pode ser repartido. Suponha a afirmação verdadeira para o caso de um polígono de k lados, para todo $k < n$.
Suponha que as cores usada sejam: vermelho (v), azul (a) e marrom (m).
Como no mínimo três cores foram usadas, existe uma diagonal cujos pontos extremos são pintados com cores distintas. Se em ambos os lados dessa diagonal a terceira cor foi usada, aplicamos a hipótese do Princípio da Indução para os dois polígonos e o problema fica resolvido. Se isso não acontece, então em um dos lados da diagonal existe um polígono com um número par de lados e com vértices pintados em ordem cíclica usando duas cores vavvavav...va. Tome um ponto que não seja extremo da diagonal escolhida e ligue esse ponto a um vértice pintado com a outra cor (m). Essa nova diagonal reparte o polígono em dois polígonos, com menos lados que o original, e com a propriedade desejada. Aplique aí o Princípio da Indução)

(5) Sugestão: Analise a situação de n piratas em função da situação de $n - 1$ e, prossiga assim, até que a situação não deixa dúvidas quanto a divisão, que é o caso de existir somente um pirata, que ficaria com todas as moedas. No caso de dois piratas, pelos dados do problema, o mais velho tem opinião majoritária.
No caso de 3 piratas, o mais velho propõe ficar 99 moedas e dar uma para o segundo mais velho.
Como seria no caso de 4 piratas?

(6) Sugestão: A soma de um número finito desses números é sempre par?