XX OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE - Em 19/09/2009

PROVA DA SEGUNDA ETAPA

NÍVEL I (Estudantes da 6ª e 7ª Séries)

Problema 1
A expressão E, a seguir, é o produto de 20 números:

$$E = \left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)\left(1+\frac{9}{16}\right)\left(1+\frac{11}{25}\right)\ldots\ldots\ldots\left(1+\frac{41}{400}\right)$$

Encontre o valor de E.

Solução

Observe que, efetuando a operação em cada parêntese, temos

$$E = \frac{4}{1}.\frac{9}{4}.\frac{16}{9}.\frac{25}{16}.\frac{36}{25}\ldots\frac{441}{400} = \frac{441}{1} = 441$$

Problema 2
Matias comprou um casaco que tem 10 bolsos. Ele quer distribuir 44 moedas de 1 real nos bolsos do casaco de modo que cada bolso contenha um número diferente de reais.

Explique se Matias vai conseguir fazer a distribuição.
Solução

O menor número de moedas que Matias pode colocar num bolso é zero. O menor número de moedas maior do que zero que ele vai conseguir colocar noutro bolso é 1. Depois de 1, o menor número de moedas que ele pode colocar em outro bolso é 2, e assim por diante. Em ordem crescente, os possíveis menores números (distintos) de moedas que Pedrinho vai poder colocar nos bolsos são: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Logo, para distribuir as moedas nos bolsos em números distintos, Matias vai precisar de uma quantidade de reais igual a:

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

Ora, Matias só tem 44 reais. Portanto, Matias não vai conseguir distribuir 44 moedas de 1 real nos bolsos do casaco de modo que cada bolso contenha um número deferente de reais.

Problema 3
Na rua onde eu moro, existem 25 casas. Nelas vivem um total de 33 animais de estimação, sendo 10 cães, 12 gatos e 11 canários. Nenhuma das casas tem mais do que um animal do mesmo tipo. Em nenhuma delas vive um gato e um canário.

(a) Qual é o *maior* número possível de casas onde não vive qualquer um destes três tipos de animais de estimação?
(b) Qual é o *maior* número possível de casas nas quais existe exatamente um destes três tipos de animais de estimação?
Solução

(a) Os 12 gatos e os 11 canários tem de estar em 12 + 11 = 23 casas. Os 10 cães podem estar distribuídos em algumas destas 23 casas. Deste modo, o maior número de casas sem qualquer animal de estimação é 2.

(b) O maior número de casas com animais de estimação ocorrerá quando duas casas sem gatos ou canários tiverem cães. Deste modo, os outros 8 cães estarão em casas com gatos ou canários. Assim, cada uma destas 8 casas terão dois animais de estimação e, como conseqüência, cada umas das outras 17 casas terão exatamente um animal de estimação.

Problema 4
Num círculo, marcam-se *n* pontos igualmente espaçados e denota-se cada um destes pontos por um número natural que vai de 1 até *n*, sendo que dois pontos distintos não estão associados a um mesmo número.

Se 14 e 52 estão em posições diametralmente opostas, qual é o valor de *n?*
Solução

Como 14 e 52 estão em posições diametralmente opostas, em cada um dos semicírculos determinados pelo diâmetro que liga estes pontos existem 52 – 14 = 38 outros pontos. Logo, a quantidade de pontos marcados é igual a duas vezes o número de pontos em cada semicírculo mais os dois pontos. Portanto, o número de pontos existente é igual a
2.(38) + 2 = 78. Ou seja, $n = 78$

XX OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE - Em 19/09/2009

PROVA DA SEGUNDA ETAPA

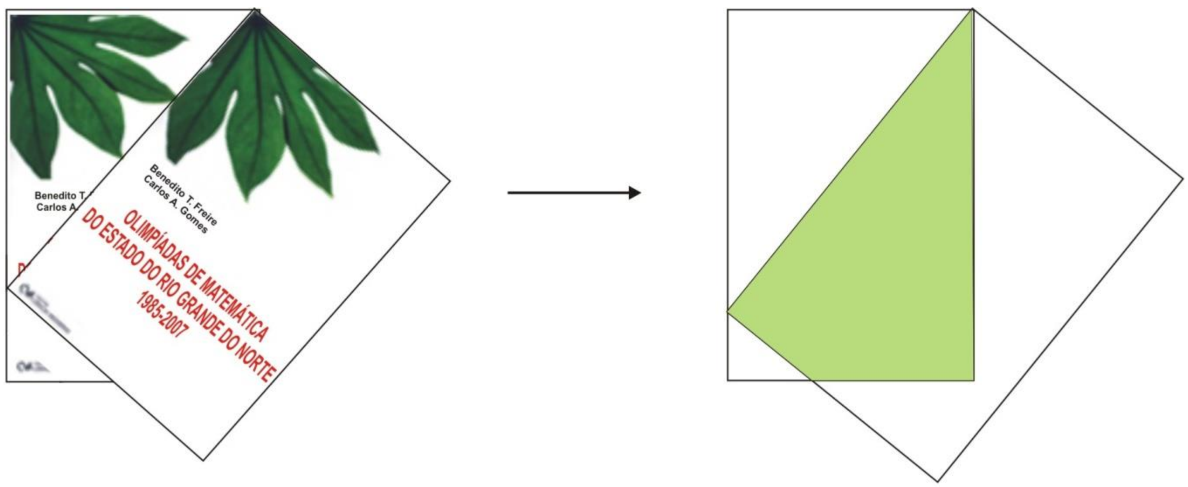
Nível II (Estudantes da 8ª e 9ª Séries)

Problema 1
Sem usar calculadora, prove que $7^{\sqrt{5}} > 5^{\sqrt{7}}$.
Solução

Basta observar que: $\left(7^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}} = 7^5 = 16807 > 15625 = 5^6 = 5^{\sqrt{36}} > 5^{\sqrt{35}} = \left(5^{\sqrt{7}}\right)^{\sqrt{5}}$

Problema 2

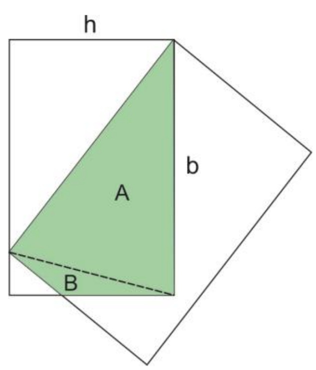
O professor Paulinho deixou desatentamente sobre uma mesa dois exemplares do livro "**OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RN"** de modo que um dos exemplares cobre parcialmente a capa do outro conforme ilustra a figura da esquerda representada a seguir.



Considerando que os exemplares possuem o formato perfeitamente retangular, descubra, justificando a sua resposta, se a medida da área da região comum as capas, que está representada sombreada na figura da direita, é maior, menor ou igual a metade da medida da área total da capa de cada um dos exemplares.

Solução

Sendo b e h os comprimentos dos dois lados do retângulo que representa a capa de um dos livros segue que a medida da área de uma das capas é $S = b.h$. Na figura, a seguir, a medida da área da região comum as duas capas é $A + B$.



Note que $A = \frac{b.h}{2} = \frac{S}{2}$. Como a área B > 0, segue que $A + B = \frac{S}{2} + B > \frac{S}{2}$. Assim a medida da área comum as duas capas é **MAIOR** que a metade da área total da capa de um dos exemplares do livro.

Problema 3

Num tabuleiro 20 x 20, pinta-se cada um dos quadrados unitários ou de preto ou de branco, com a condição de que os quatro quadrados localizados nos cantos sejam pretos e os demais quadrados unitários no bordo do tabuleiro sejam brancos. Dois quadrados unitários do tabuleiro são vizinhos quando tem um lado em comum ou um vértice em comum. Em cada um dos quadrados unitários do tabuleiro escreve-se o número que é igual a quantidade de seus vizinhos pretos.

A soma dos números escritos no tabuleiro pode ser 480?

Solução

Seja n o número de quadrados unitários pretos. Podemos concluir que, dos n quadrados unitários pretos, existem 4 nos cantos e $n - 4$ quadrados unitários pretos no interior do tabuleiros. Por outro lado, cada quadrado no canto do tabuleiro possui 3 vizinhos e cada quadrado no interior do tabuleiro tem 8 vizinhos. Isto implica que a soma de todos os números no tabuleiro é dado por

$$4.3 + 8.(n - 4)$$

Assim, a soma de todos os números no tabuleiro é dado por $4.3 + 8.(n - 4) = 8n - 20$.
Devemos saber se existe um valor inteiro para n de modo que

$$8n - 20 = 480.$$

Mas, esta última igualdade é equivalente a $8n = 500$. Como 500 não é divisível por 8, então a soma dos números escritos no tabuleiro não pode ser 400.

Problema 4

Num torneio de xadrez participam 8 jogadores e qualquer um deles joga uma única vez com cada um dos os outros participantes. Se um jogador vence uma partida, ele ganha 1 ponto; se empata ganha 0,5 ponto e se perde não pontua. No final do torneio as pontuações dos participantes foram todas distintas, sendo que a pontuação do segundo colocado foi igual à soma dos pontos dos quatro últimos colocados.

Quais foi o resultado do jogo entre os jogadores que no final se classificaram em terceiro e sexto lugares, respectivamente?

Solução

Sejam: x_1 a quantidade de pontos do jogador classificado no primeiro lugar;
x_2 a quantidade de pontos do jogador classificado no segundo lugar;
x_3 a quantidade de pontos do jogador classificado no terceiro lugar;
....

x_8 a quantidade de pontos do jogador classificado no oitavo lugar

Assim, temos $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5 > x_6 > x_7 > x_8$. Observe que cada um dos competidores jogou 7 vezes. Portanto, o jogador classificado em primeiro lugar fez uma quantidade de pontos $x_1 \leq 7$. Como $x_2 < x_1$, temos que $x_2 \leq 6{,}5$.
Por outro lado, os quatro jogadores colocados nos quatro últimos lugares, com pontuações $x_5 > x_6 > x_7 > x_8$, jogaram entre si $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ partidas. Isto significa que estes quatro últimos jogadores colocados tem, juntos, no mínimo 6 pontos. Ou seja, temos:

$$x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 6.$$

Como $x_2 = x_5 + x_6 + x_7 + x_8$, segue que $x_2 \geq 6$. Assim, temos que $6 \leq x_2 \leq 6{,}5$.
Vamos mostrar que x_2 tem de ser igual a 6.
Se $x_2 = 6{,}5$, então o jogador colocado em segundo lugar venceu 6 partidas e empatou uma. Mas, como a pontuação dos participantes foram todas distintas, sendo $x_1 > x_2$, segue que a pontuação do primeiro lugar, x_1, não poderia ser maior do que x_2, o que é uma contradição. Logo, $x_2 = 6 = x_5 + x_6 + x_7 + x_8$. Isto significa que o resultado dos últimos quatro colocados foi:
- O jogador colocado em 5º lugar venceu os jogadores colocados em 6º, 7º e 8º lugares;
- O jogador colocado em 6º lugar venceu os jogadores colocados em 7º e 8º lugares;
- O jogador colocado em 7º lugar venceu o jogador colocado em 8º lugar; e perderam os jogos para ao jogadores classificados nos quatro primeiros lugares.

Portanto o jogador classificado em terceiro lugar vence aquele classificado em sexto lugar.

XX OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE - Em 19/09/2009

PROVA DA SEGUNDA ETAPA

Nível III (Estudantes do Ensino Médio)

Problema 1
A sequência de números inteiros

1, 2, 3, 2, 2, 5, 2, 2, 2, 7, 2, 2, 2, 2, 9, 2, 2, 2, 2, 2, 11, ...

é formada intercalando n números 2 entre o n-ésimo e o n+1-ésimo números ímpares.

Encontre a soma dos primeiros 2009 números da sequência dada.
Solução

Considere o k-ésimo bloco de números 2, escrito logo em seguida ao k-ésimo número ímpar: $2k - 1$.
Depois que o último número 2 deste bloco for escrito, teremos listado uma quantidade de números igual a

$$k + 1 + 2 + 3 + ... + k = k + [k(k + 1)]/2.$$

(O primeiro k corresponde a quantidade de números ímpares listados e as parcelas restantes correspondem a quantidade de 2 escritos)
Queremos que esta quantidade de números seja igual a 2009. Assim, temos que

$$k + [k(k + 1)]/2 = 2009,$$

que é o mesmo que $2k + [k(k + 1)] = 4018$, ou ainda $k(k + 3) = 4018$, que implica em encontrar k aproximadamente igual a 61.

Assim, depois de escrevermos o último 2 do 61-ésimo bloco de 2, teremos listados

$$61 + [61(61 + 1)]/2 = 1952 \quad \text{números.}$$

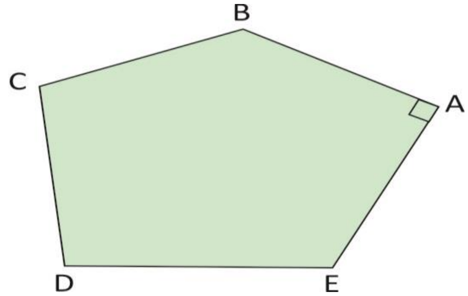
Depois de ter listado o 61-ésimo bloco de 2, virá o 62-ésimo número ímpar, que é igual a $2.62 - 1 = 123$. Depois dele, para atingirmos o 2009-ésimo número da sequência, necessitamos escrever um bloco de 56 números 2.

O número pedido é igual a soma dos primeiros 62 números ímpares, mais a soma dos 2 em todos os blocos escritos até atingir o 2009-ésimo número da sequência:

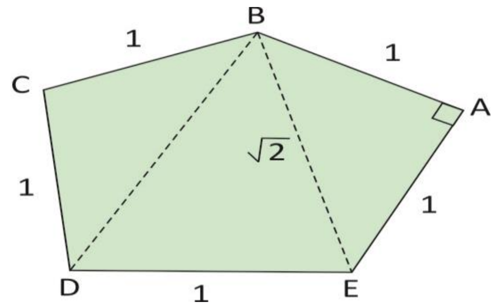
$$(1 + 3 + 5 + ... + 123) + 2 + (2 + 2) + (2 + 2 + 2) + ... + (2 + 2 + ...2) + 2.56 =$$

$$= 62^2 + 2.[61(61+1)]/2+2.56 = 3844 + 3782+ 112 = 7738$$

Problema 2
Determine a medida da maior área que pode possuir um pentágono eqüilátero de lado 1cm e que tem um dos seus ângulos internos retos.



Solução:



Notação: ( ) = Área

Na figura acima, a área do triângulo ABE é dada por: $(ABE)=\frac{1.1}{2}=\frac{1}{2}$.

Agora observemos o quadrilátero EBCD de lados $\sqrt{2}$, 1, 1 e 1. Segue que a área deste quadrilátero é igual a

$$(EBCD)=(BCD)+(EBD)=\frac{1}{2}1.1.\text{sen}C+\frac{1}{2}1.\sqrt{2}\text{sen}E\Rightarrow$$

$$(EBCD)=\frac{1}{2}\text{sen}C+\frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}E$$

Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos BCD e EBD, temos

$$BD^2=2-2\cos C=3-2\sqrt{2}\cos E\Rightarrow 2\cos C-2\sqrt{2}\cos E=-1\Rightarrow$$

$$\cos C-\sqrt{2}\cos E=-\frac{1}{2}$$

Mas, podemos reescrever $\cos C-\sqrt{2}\cos E=-\frac{1}{2}$ como

$$\cos C-\sqrt{2}\cos E=-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}\cos C-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos E=-\frac{1}{4}$$

Assim,

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\cos C-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos E=-\frac{1}{4}\\(EBCD)=\frac{1}{2}\text{sen}C+\frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}E\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{16}=\frac{1}{4}\cos^2 C-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos C\cos E+\frac{1}{2}\cos^2 E\\(EBCD)^2=\frac{1}{4}\text{sen}^2C+\frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}C\text{sen}E+\frac{1}{2}\text{sen}^2E\end{cases}$$

Adicionando as duas expressões acima, obtemos:

$$(EBCD)^2+\frac{1}{16}=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(C+E)+\frac{1}{2}\Rightarrow(EBCD)=\sqrt{\frac{11}{16}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(C+E)}$$

Portanto, a medida da área do quadrilátero EBC, notada como $(EBCD)$, será máxima quando $\cos(C+E)=-1$ e valerá $(EBCD)=\sqrt{\frac{11}{16}+\frac{\sqrt{2}}{2}}$. Assim a máxima medida da área do pentágono será $(ABCDE)=\sqrt{\frac{11}{16}+\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{1}{2}$.

***Problema* 3**

Num tabuleiro 9 por 9, colocamos 65 formigas, cada uma delas ocupando num quadrado unitário do tabuleiro, de modo que as formigas preenchem 65 dentre os 81 quadrados unitários existentes. Um movimento é quando uma formiga se desloca ou horizontal ou verticalmente para o quadrado unitário adjacente aquele em que ela se encontra. Dois quadrados são adjacentes quando possuem um lado em comum.

Se nenhuma formiga faz dois movimentos horizontais ou dois movimentos verticais sucessivos, mostre que depois de alguns movimentos, existirão no mínimo duas formigas no mesmo quadrado unitário do tabuleiro.

Solução

Considere S o conjunto de todos os 81 pares ordenados (a, b), com $a, b = 1, 2, 3, ...,9$.
Associe, de modo único, ao quadrado unitário do tabuleiro, localizado na a-ésima linha e b-ésima coluna, o par (a, b).
O conjunto S é formado por três tipos de pares (ou quadrados unitários): A, B e C.
O tipo A é formado por todos os pares (a, b) (ou quadrados unitários) em que a e b são ímpares; o tipo B é formado por todos os pares (a, b) em que a e b são pares e o tipo C é formado pelos restantes.
É fácil ver que existem 25 pares (ou quadrados unitários) do tipo A, 16 do tipo B e 40 do tipo C.

Suponha que em nenhum momento existirão duas formigas no mesmo quadrado unitário.

Depois de dois movimentos sucessivos, formigas que se encontram em quadrados do tipo A estarão em quadrados do tipo B.
Como, depois de cada movimento, o número máximo de formigas em quadrados do tipo A é 16, existem no máximo 32 formigas em quadrados do tipo A ou B.
De maneira análoga, depois de um movimento, as formigas em quadrados do tipo C estarão em quadrados do tipo A ou do tipo B.
Mas, em cada movimento, existem no máximo 32 formigas ocupando quadrados do tipo C.
Isto significa que existem no máximo 64 formigas no tabuleiro. Contradição, pois existem 65 formigas.

***Problema* 4**

Paulinho brinca lançando várias vezes uma moeda comum, que possui uma face "CARA" e outra "COROA". Após cada lançamento, ele anota o resultado num papel: CARA ou COROA. Paulinho quer parar a brincadeira quando ocorrerem duas "CARAS" consecutivas.

Qual a probabilidade de que Paulinho tenha feito exatamente 10 lançamentos ao parar com a brincadeira?

Solução

Em 10 lançamentos de uma mesma moeda existem 2^{10} resultados possíveis. Seja A_i o resultado obtido no i-ésimo lançamento da moeda. Queremos determinar o número de resultados possíveis em que $A_9 = A_{10}$ = CARA e que não haja duas CARAS consecutivas

nos lançamentos anteriores: A_1 A_2 A_3 ... A_8 A_9, pois pretende-se terminar o processo exatamente após o 10° lançamento. Assim, com certeza devemos ter A_8 = COROA, pois, caso contrário, teríamos $A_8 = A_9$ = CARA, o que faria com que o jogo acabasse imediatamente após o 9° lançamento da moeda. Como já sabemos que os três últimos resultados devem ser, respectivamente, COROA, CARA , CARA, precisamos então determinar quantas sequências de 7 lançamentos não possuem duas CARAS consecutivas. Para isso raciocinemos da seguinte forma:
Seja x_n o número de sequências de tamanho n em que **<u>NÃO</u>** aparecem duas CARAS em posições consecutivas. Note que temos dois tipos destas sequências de n termos:

1) As que começam por CARA, COROA devem ser seguidas por uma sequência de n-2 termos onde não aparecerão duas CARAS consecutivas.
2) As que começam por COROA ; ela deve ser seguida de uma sequência de n-1 termos onde não aparecerão duas CARAS consecutivas.

Assim $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$
Se n =1, teríamos apenas duas possibilidades, a saber: CARA ou COROA ,
Assim $x_1=2$.
Se n = 2, teríamos 3 possibilidades, a saber ;

CARA, COROA
COROA, CARA
COROA, COROA

Assim, $x_2=3$.
Como $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, segue que os primeiros termos a sequência são (2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...)
Assim $x_7 = 34$. Assim concluímos que existem 34 sequências de 7 lançamentos que não possuem duas CARAS consecutivas . Portanto, a probabilidade pedida é $P = \frac{34}{1024} = \frac{17}{512}$