XXIII **OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO RIO GRANDE DO NORTE - ANO 2012**

**PROVA DA SEGUNDA ETAPA - Em 29/09/2012**

**NÍVEL** I (**6$^a$ e 7$^a$ Séries**)

**Problema** 1
Colocam-se setenta e sete copos sobre uma mesa - todos de cabeça para baixo.Um movimento permitido é desvirar quaisquer quatro copos.
É possível chegar a uma situação onde todos os copos estejam virado para cima?

**Resolução:**

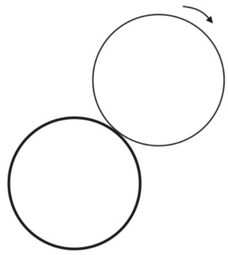
Não. Inicialmente, existem 77 copos, que é um número ímpar. Cada movimento feito não altera a paridade do número de copos de cabeça para baixo. Inicialmente, esse número é ímpar e ao longo de todo o processo continua ímpar. Logo, o número de copos de cabeça para baixo nunca poderá ser par e zero é um número par.

**Problema** 2
Existem 9 cestas arrumadas em volta de um círculo e pretende-se colocar laranjas nelas.
Diga, justificando, se é possível arrumar as laranjas nas cestas de modo que a diferença entre o número de laranjas em quaisquer duas cestas adjacentes seja 1.

**Resolução:**

Não. Observe que o número de laranjas em quaisquer duas cestas adjacentes tem de ser alternadamente um número par e um número ímpar. Se, por exemplo, na primeira cesta colocamos um número par de laranjas, na segunda cesta teremos que colocar um número ímpar, na terceira cesta um número par de laranjas, e assim por diante. Desse modo, na cesta de número 9 teremos de colocar um número par de laranjas. Mas, a cesta de número 1 é adjacente a cesta de número 9 e contém um número par de laranjas. Se na primeira cesta colocamos um número ímpar de laranja, o raciocínio é análogo. Portanto, é impossível arrumar as laranjas nas cestas de modo que a diferenças entre o número de laranjas em quaisquer duas cestas adjacentes seja 1.

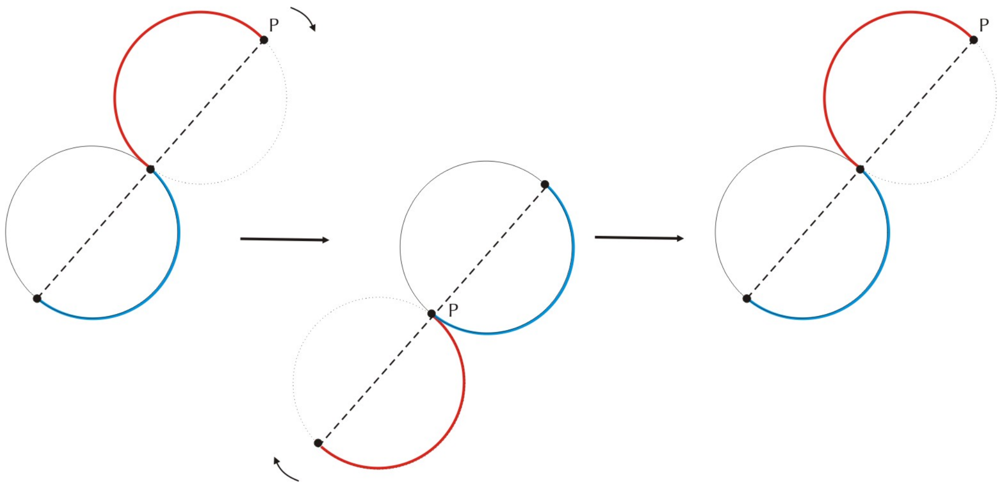
**Problema** 3
Tem-se duas moedas iguais. Uma delas gira, sem deslizar, em torno da outra.



Quantas voltas sobre seu centro dará a moeda que gira até retornar à posição original?

**Resolução:**

Estamos supondo que a moeda acima gira, sem deslizar, no sentido horário sobre a moeda colocada na posição inferior. Observe que o comprimento do semicírculo acima é igual ao comprimento do semicírculo na moeda abaixo (que está parada), veja figura a seguir:




Portanto, quando a moeda gira meia volta o ponto $P$ ponto chegará ao ponto diametralmente oposto da sua posição inicial. Assim, para que o ponto $P$ retorne à sua posição a moeda deve girar uma revolução completa.

**Problema** 4
Pedro tem $111$ fichas azuis e $88$ fichas brancas. Existe uma máquina que faz dois tipos de operações: uma é trocar $14$ fichas azuis por $11$ fichas brancas e a outra é trocar $7$ fichas brancas por $13$ azuis.
Determine se Pedro pode conseguir, mediante sucessivas operações com a máquina, aumentar em 33 o número total de fichas, de modo que a quantidade de fichas azuis seja igual a $\frac{5}{3}$ da quantidade de fichas brancas.
Se isto for possível, indique como fazê-lo. Se não é possível, explique por quê.

**Resolução:**

Inicialmente, o número total de fichas é $111 + 88 = 199$. Aumentando esse número de 33, teremos ao todo $199 + 33 = 232$ fichas. Sejam $A$ o número de fichas azuis e $B$ o número de fichas brancas. Pelos dados do problema, $A = \frac{5}{3}B$ e $A + B = 232$ . Assim, $\frac{5}{3}B + B = 232 \Rightarrow B = \frac{3\times 232}{8} = 87$ e $A = 232 - 87 = 145$.
Sejam $m$ a quantidade de vezes que Pedro trocou $14$ fichas azuis por $11$ fichas brancas e $n$ a quantidade de vezes que ele trocou $7$ fichas brancas por $13$ fichas azuis. Logo, temos que:
$111 - 14m + 13n = 145$ e $88 + 11m - 7n = 87$. Assim, $-14m + 13n = 34$ e $7n - 11m = 1$, o que nos leva a

concluir que $m = 5$ e $n = 8$. Portanto, Pedro deve trocar $5$ vezes $14$ fichas azuis por $11$ fichas brancas e $8$ vezes 7 fichas brancas por $13$ azuis.