XXIII **OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO RIO GRANDE DO NORTE - ANO 2012**

PROVA DA SEGUNDA ETAPA - Em 29/09/2012

NÍVEL II **(8^a e 9^a Séries)**

Problema 1

Encontre o cubo do número $k = \sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\cdots}}}}}$

Resolução:

Observe que:

$$k = \sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\cdots}}}}} \Rightarrow k^2 = 5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\cdots}}}} \Rightarrow k^4 = 5^2.3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\cdots}}} = 75.k$$

que é o mesmo que $k^4 - 75k = 0$. Logo,

$$k^4 - 75k = 0 \Rightarrow k(k^3 - 75) = 0$$

Ora, como $k = \sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\cdots}}}}} \neq 0$, segue que

$$k(k^3 - 75) = 0 \Rightarrow k^3 - 75 = 0 \Rightarrow k^3 = 75$$

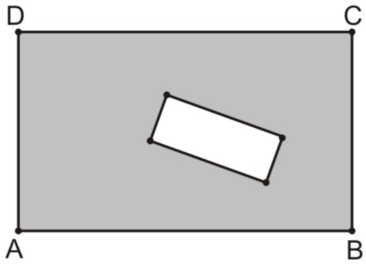
Problema 2

Um dragão dá 100 moedas a um cavalheiro que ele mantém prisioneiro. A metade das moedas é constituída de moedas mágicas, mas somente o dragão sabe quais são elas. Cada dia, o cavalheiro tem que dividir as 100 moedas em duas pilhas, não necessariamente do mesmo tamanho e podendo aproveitar, caso julgue conveniente, a divisão já feita no dia anterior. Se algum dia as duas pilhas possuem o mesmo número de moedas mágicas ou as pilhas tem o mesmo número de moedas não mágicas, o cavalheiro ganha a liberdade. Determinar se o cavalheiro pode ganhar sua liberdade em 50 dias ou menos.

Resolução:

Para o cavalheiro ganhar a liberdade em 50 dias.
No primeiro dia, ele separa as moedas em duas pilhas A e B, sendo 25 na pilha A e 75 na pilha B. A cada dia, ele passa uma moeda da pilha B para a pilha A. Assim, em 49 passos, ele tem que passar pela mesma quantidade de moedas mágicas nas duas pilhas ou na mesma quantidade de moedas não mágicas nas duas pilhas.

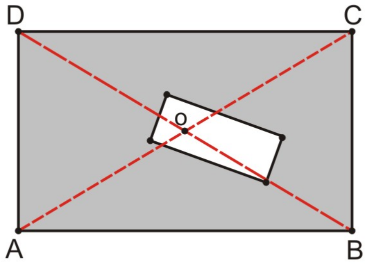
Problema 3
Um retângulo pequeno está inteiramente contido num retângulo maior ABCD conforme ilustra a figura abaixo:



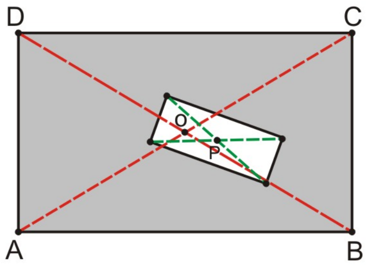
Usando somente linhas retas, construa (justificando a sua construção), uma linha que divide a região sombreda em duas partes de mesma área.

Resolução:

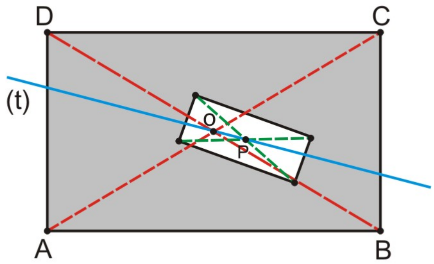
O fato primordial para a solução deste problema é perceber que toda reta que "passa"' através do centro de um retângulo o divide em dois polígonos de mesma área. Então para solucionarmos o problema traçamos inicialmente as duas diagonais do retângulo maior, o que determina o seu centro O, conforme ilustra a figura a seguir:



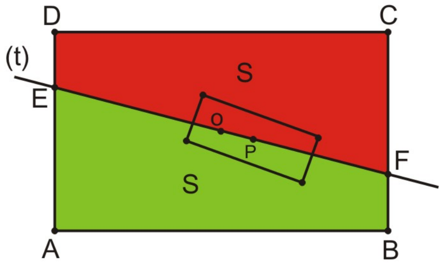
Agora tracemos também as diagonais do retângulo menor, determinando o seu centro P, conforme ilustra a figura abaixo:

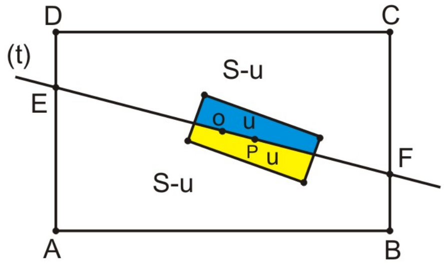


Assim a reta (t) definida pelos ponto O e P divide cada um dos retângulos em dois polígonos de mesma área e portanto divide a região sombreda em duas regiões de mesma área, conforme ilusta a figura a seguir:



Para ver isso de forma mais clara veja das figuras a seguir:





onde representamos por S (na figura da esquerda) a medida da área de cada um dos polígonos em que o retângulo $ABCD$ fica dividido pela reta (t) e por u a medida da área de cada um dos polígonos em que o retângulo interno fica dividido pela reta (t) (figura da direita). Diante do exposto, as medidas das áreas das regiões sombreadas que ficam acima e abaixo da reta (t) quando excluimos o retângulo menor no interior do retângulo maior são iguais a $S - u$.

Problema 4
Pedrinho escreve os inteiros $1, 2, 3, \cdots, 99, 100$ em 100 cartões, sendo um número por cada cartão. Então Pedrinho dá alguns deles para Maria. Sabe-se que, para todo cartão de Pedrinho e todo cartão de Maria, se existe o cartão com a soma dos respectivos números nos dois cartões (um de Pedrinho e outro de Maria), este não está com Pedrinho e o cartão com o produto dos respectivos números nos dois cartões (um de Pedrinho e outro de Maria) não está com Maria. Quantos cartões possui Maria se o cartão de número 13 está com Pedrinho?

Resolução:

Resposta: 93 cartões.
Vamos mostrar que o cartão de número 1 está com Maria. Suponha o contrário, que o cartão de número 1 esteja com Pedrinho. Seja k o número de um cartão de Maria. Como $1.k = k$ e como, por hipótese, o produto dos números dos dois cartões não está com Maria, temos uma contradição. Assim, o cartão de número 1 está com Maria.
Vamos mostrar agora que o cartão de número 12 está com Maria. Suponha o contrário, que o cartão de número 12 esteja com Pedrinho. Como $1 + 12 = 13$ e como a soma dos números nos dois cartões não está com Pedrinho, temos uma contradição (pois, segundo o enunciado, o cartão com o número 13 está com Pedrinho!), o que implica que o cartão de número 12 está com Maria. Agora, como $13 = 6 + 7$, segue que, como o cartão com número 13 esta com Pedrinho, então os cartões com números 6 e 7 estão com a mesma pessoa (pois se tivessem com pessoas diferentes a soma 13 estaria com Maria, o que não é verdade, por hipótese!). Observe que estes dois cartões não podem estar com Pedrinho, pois, caso contrário, o cartão com a soma $1 + 6 = 7$, sendo o cartão com o número 1 de Maria e o com o 6 de Pedrinho, pela hipótese do problema,o cartão que possui a soma de dois cartões que estão com pessoas diferentes não está com Pedrinho. Assim, os dois cartões, com números 6 e 7 respectivamente, estão com Maria.
De modo análogo, podemos concluir que todos os cartões de 1 até 12 estão com Maria. Além disso, que

todos os cartões com números da forma $13k$, para $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ estão com Pedrinho e todos os outros cartões estão com Maria. Portanto, Maria tem $100 - 7 = 93$ cartões.