XXIII **OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO RIO GRANDE DO NORTE - ANO 2012**

PROVA DA SEGUNDA ETAPA - Em 29/09/2012

NÍVEL III **(Ensino Médio)**

Problema 1
Os números inteiros positivos são arrumados em linhas e colunas na forma triangular mostrada abaixo:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \cdots & \cdots \\ 2 & 5 & 9 & 14 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4 & 8 & 13 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 7 & 12 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 11 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Encontre o número da coluna e o número da linha onde se encontra o número 2012.

1^a Resolução:

Vamos usar a notação: c_{ij} é o número que se encontra na linha de número i e coluna de número j.Observe que os números colocados na primeira posição de cada coluna (i.e. na primeira linha da arrumação dada), $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, \cdots$, correspondem à soma do inteiros positivos anteriores a ele arrumados em linhas e colunas na forma triangular:

$c_{11} = 1$
$c_{12} = 3 = 1 + 2$
$c_{13} = 6 = 1 + 2 + 3$
$c_{14} = 10 = 1 + 2 + 3 + 4$
$\vdots$
$c_{1k} = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$
$\vdots$

Assim, temos que encontrar o valor de k para o qual $\frac{k(k+1)}{2} \leq 2012$. Para isso, podemos que analisar a equação $\frac{k(k+1)}{2} = 2012$, 0u seja, $k(k+1) = 4024$, que nos dá $k \approx 63$. Isto significa que o número 2012 está na "diagonal"dos números que começa em alguma linha , terminando na primeira linha (e coluna 63). Como o número $c_{63} = 1 + 2 + 3 + \vdots + 63 = 2016$. Como o primeiro número da coluna imediatamente anterior é c_{62} e temos que $c_{62} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 62 = 1953$, então essa "diagonal"começa na primeira coluna com o número 1954. Isto significa que o número 2012 está 4 colunas à esquerda da coluna 63, ou seja, está na coluna 59 e quinta linha, de cima para baixo.

2^a Resolução:

Resposta: linha de número 5 e na coluna de número 59.
Vamos olhar atentamente para as diagonais da tabela acima; na primeira diagonal aparece apenas um número: o 1, na segunda diagonal aparecem dois números; o 2 e o 3; na terceira diagonal aparecem três números: o 4, o 5 e o 6, e assim sucessivamente. Assim, quando tivermos preenchido a nossa tabela com k diagonais teremos escrito na tabela $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ elementos. Ora, como para chegarmos ao número 2012 temos que escrever do 1 ao 2012, ou seja, temos que escrever 2012 números. Assim,

$$\frac{k(k+1)}{2} \leq 2012 \Rightarrow k(k+1) = 4024 \Rightarrow k \approx 63$$

Na verdade, se $k = 63$, segue que $\frac{k(k+1)}{2} = \frac{63.(63+1)}{2} = \frac{63.64}{2} = 2016$. O que nos diz que diagonal de número 63 tem 63 números e o último deles é 2016. Ora, como queremos localizar o número 2012 basta "voltarmos" quatro números nesta mesma diagonal. Como 2016 é o último número da diagonal 63, segue que ele se encontra da coluna 63, logo o 2012 estará na coluna $63 - 4 = 59$. Por outro lado 2016 está na primeira linha, ora, como devemos descer 4 linhas para atingir o 2012 segue que o 2012 estará na linha 5.

Problema 2
Uma sala de aula tem 30 estudantes: 15 rapazes e 15 garotas. As cadeiras da sala são arrumadas em 5 filas e 6 colunas. Pretende-se sentar os estudantes de modo que nenhum rapaz esteja imediatamente em frente, imediatamente atrás ou imediatamente ao lado de outro rapaz. O mesmo deve ocorrer entre as garotas.
De quantos modos os estudantes podem ocupar as cadeiras da sala?

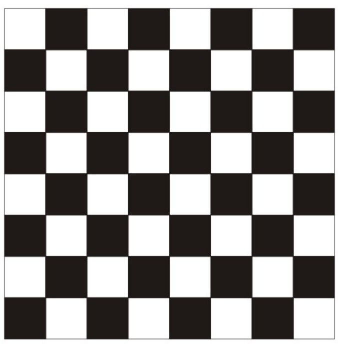
Resolução:

Pinte as cadeiras da sala como um tabuleiro de xadrez, onde as cadeiras sejam alternadamente brancas e pretas. Os estudantes do mesmo sexo devem sentar em cadeiras de mesma cor. Assim, os rapazes podem ocupar as cadeiras brancas ou pretas. Uma vez escolhidas a cor das cadeiras para os rapazes, existem $15!$ maneiras de colocá-los nas cadeiras de mesma cor. O mesmo acontece com as garotas. Portanto, existem $2x(15!)^2$ de fazer a ocupação das cadeiras de acordo com as regras do problema.

Problema 3
Colocam-se num tabuleiro 8 por 8 os números naturais $1, 2, 3, \cdots, 64$, sendo um número por cada quadrado unitário do tabuleiro (com lados paralelos ao bordo), de modo que números consecutivos sejam adjacentes numa linha ou coluna.
Qual é o valor mínimo da soma dos números colocados ao longo de uma diagonal?

Resolução:

Pinte o tabuleiro como de costume, com as casas alternadamente de branco e preto:



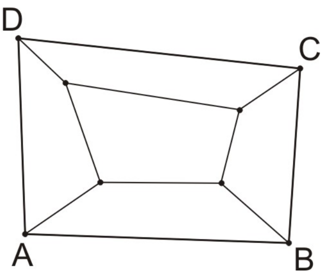
Como números consecutivos ocupam quadrados unitários de cor opostas, podemos supor que todos os números ímpares ocupam as casas pretas e todos os pares ocupam as casas brancas. Na figura a seguir, dispomos os números de modo que o valor mínimo atingido pela soma dos números colocados ao longo de uma diagonal é (note que a estratégia é tentar por os menores ímpares possíveis numa diagonal, sem contrariar o enunciado!)

$$88 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 39$$

conforme ilustra a figura a seguir:

32	33	34	35	36	37	38	39
31	18	17	16	15	14	13	40
30	19	20	21	10	11	12	41
29	24	23	22	9	44	43	42
28	25	6	7	8	45	46	47
27	26	5	52	51	50	49	48
2	3	4	53	54	55	56	57
1	64	63	62	61	60	59	58

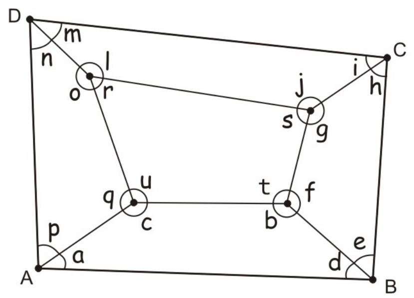
Problema 4
Um quadrilátero convexo $ABCD$ é formado pela justaposição de cinco quadriláteros convexos menores, conforme ilustra a figura abaixo:



Mostre que, se os cinco quadriláteros menores são cíclicos, isto é, cada um deles pode ser inscrito num círculo então o quadrilátero $ABCD$ também é cíclico.

Resolução:

Para começar vamos nomear as medidas de todos os âgulos dos cinco quadriláteros cíclicos, conforme ilustra a figura abaixo:



Lembrando que a condição necessária e suficiente para que um quadrilátero seja cíclico é que a soma das medidas dos ângulos opostos é 180^o,para mostramos que o quadrilátero $ABCD$ é cíclico´basta mostar que

$$(m + n) + (d + e) = 180^0 \text{ e } (a + p) + (h + i) = 180^o$$

De fato, como os cinco quadriláteros menores são, por hipótese, cíclicos, podemos afirmar que:

$$a + b = 180^o \ , \ c + d = 180^o \ , \ e + g = 180^o \ , \ f + g = 180^o \ , \ m + j = 180^o$$

$$l + i = 180^o \ , \ n + q = 180^o \ , \ p + o = 180^o \ , \ u + s = 180^o \ , \ r + t = 180^o$$

Assim,

$$\begin{cases} m + j = 180^o \\ n + q = 180^o \end{cases} \Rightarrow (m + n) + j + q = 360^o$$

$$\begin{cases} c + d = 180^o \\ e + g = 180^o \end{cases} \Rightarrow (d + e) + c + g = 360^o$$

portanto,

$$\begin{cases} (m + n) + j + q = 360^o \\ (d + e) + c + g = 360^o \end{cases} \Rightarrow (m + n) + (d + e) + j + c + q + g = 720^o$$

Por outro lado, olhando para os vértices do quadrilátero central, segue que:

$$j + s + g = 360^o \ , \ t + b + f = 360^o \ , \ q + u + c = 360^o \ , \ l + o + r = 360^o$$

Além disso,

$$\begin{cases} j + s + g = 360^o \\ q + u + c = 360^o \end{cases} \Rightarrow (j + s + g) + (q + u + c) = 720^o$$

$$\Rightarrow (j + c + q + g) + \underbrace{(s + u)}_{=180^o} = 720^o \Rightarrow j + c + q + g = 540^o$$

Finalmente,

$$\begin{cases} (m + n) + (d + e) + j + c + q + g = 720^o \\ j + c + q + g = 540^o \end{cases} \Rightarrow (m + n) + (d + e) + \underbrace{j + c + q + g}_{=540^o} = 720^o$$

$$\Rightarrow (m + n) + (d + e) = 180^o$$

Combinando de modo análogo as equações que ainda não foram usadas, demonstra-se que:

$$(a + p) + (h + i) = 180^o$$

o que demonstra que o quadrilátero $ABCD$ é cíclico.