XXII OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO RIO GRANDE DO NORTE - ANO 2011

PROVA DA SEGUNDA ETAPA – Em 17/09/2011

NÍVEL I (6ª e 7ª Séries)

***Problema* 1**
Na figura baixo, temos uma fila de cinco quadrados unitários. O número escrito em cada quadrado hachurado é a média aritmética dos números nos quadrados adjacentes.

5			**38**	***x***

Qual é o valor de ***x?***
Solução

Sejam a o números do quadrado adjacente ao quadrado com o número 5 e b números do quadrado adjacente ao quadrado com o número 38:

5	a	b	**38**	***x***

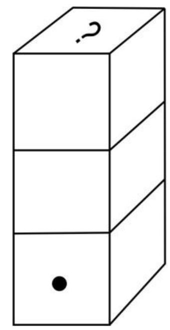
Pelos dados do problema, temos

$a = \frac{5+b}{2} \Rightarrow 2a = 5 + b$ (1)

$b = \frac{a+38}{2} \Rightarrow 2b = a + 38$ (2)
$38 = \frac{b+x}{2} \Rightarrow 76 = b + x$ (3)

De (1) e (2), temos que $a = 16 \quad e \quad b = 27$.
De (3), temos que $76 = 27 + x \Rightarrow x = 49$.

Problema 2
Num dado normal, a soma dos pontos em duas faces opostas quaisquer é 7. Três dados normais são empilhados um em cima do outro, de modo que a soma dos pontos em qualquer par de faces em contato seja 5. Uma das faces visíveis do dado inferior mostra um único ponto.



Quantos pontos tem na face do dado superior?
Solução

Seja x o número de pontos na face superior. O problema pede para que determinemos o valor de x.
Como os dados são normais, na face inferior do dado superior tem $7 - x$ pontos. Pelos dados do problema, na face superior do dado do meio tem $5 - (7 - x) = x - 2$ pontos. Logo, na face inferior do dado do meio existem $7 - (x - 2) = 9 - x$ pontos. Desse modo, na face superior do dado inferior tem $5 - (9 - x) = x - 4$ pontos.
Portanto, nas faces observadas, os pontos existentes são x, $7 - x$, $x - 2$, $9 - x$, $x - 4$.
Como o número de pontos em cada face de um quadrado normal é um número inteiro de 1 a 6, temos que os valores possíveis para x são 5 ou 6. Mas, se $x = 5$, no dado mais embaixo teríamos duas faces com 1 ponto, pois $5 - 4 = 1$ e já se observa 1 ponto em uma de suas faces visíveis.
Portanto, x não pode ser 5 e a resposta é $x = 6$.

Problema 3
Uma caixa cúbica sem tampa, de dimensões 4m x 4m x 4m contém 64 cubinhos que preenchem a caixa completamente.

Quantos desses cubinhos tocam alguma face lateral ou o fundo da caixa?
Solução

Consideramos os cubinhos distribuídos dentro da caixa em quatro camadas, com $4 \times 4 = 16$ cubinhos por cada camada.
Os 16 cubinhos da camada inferior, os cubinhos da base da caixa, tocam o fundo da caixa.
Em cada uma das três camadas, acima da camada inferior, existem 4 cubinhos centrais que não tocam qualquer face da caixa ou o fundo da caixa. Os outros 12 cubinhos tocam alguma face lateral da caixa.
Portanto, o número total de cubinhos que tocam alguma face lateral ou o fundo da caixa é:
$16 + 12 + 12 + 12 = 52$.

Problema 4

Matias está escrevendo numa folha de papel extensa os múltiplos inteiros de 23, sem espaços entre eles e começando com 23. Ou seja, Matias está escrevendo a sequência de números:

23466992115138161.............

Qual é o dígito que ocupará a posição 1500 na sequência que Matias está escrevendo?

Solução

Existem somente 4 múltiplos de 23 com 2 dígitos: 23 = 23 . 1, 46 = 23 . 2, 69 = 23 . 3 e 92 = 23. 4. Quando Matias escrever esses quatro múltiplos de 23 ele terá escrito 8 dígitos.
Existem 39 múltiplos de 23 com 3 dígitos: 23 . 5 = 115, 138 = 23 . 6,......., 23 . 43 = 989.
Quando Matias escrever esses trinta e nove múltiplos de 23 ele terá escrito 117 dígitos.
Agora, observe que 1500 – (117 + 8) = 1500 – 125 = 1375 e que 1375 = 4 . 343 + 3.
Os múltiplos de 23 com 4 dígitos começam a partir de 23 . 44 = 1012. Quando Matias escrever o múltiplo 23 . 387 = 8901, terá escrito ao todo 8 + 3 . 39 + 4. 343 = 1497 dígitos. Portanto, restam 3 dígitos para completar os 1500, que será atingido quando ele escrever o terceiro dígito do próximo múltiplode 23, que será 23 . 387 = 8924. Portanto, a resposta é 2.

XXII OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO RIO GRANDE DO NORTE – ANO 2011

PROVA DA SEGUNDA ETAPA – Em 17/09/2011

Nível II (8ª e 9ª Séries)

Problema 1

Se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ números inteiros positivos tais que $\boldsymbol{a^3 + b^3 = 2ab(a + b)}$.

Encontre o valor da expressão $E = a^{-2}b^2 + a^2b^{-2}$

Solução

Temos que $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = 2ab(a + b) + 3ab(a + b) = 5ab(a + b)$.
Cancelando $(a + b)$ de cada lado, temos $(a + b)^2 = 5ab$, que é o mesmo que
$a^2 + b^2 + 2ab = 5ab$, ou ainda $a^2 + b^2 = 3ab$.
Dividindo ambos os lados da última igualdade por *ab*, temos $\frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} = 3$, que é o mesmo que

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$. Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2 = 9$, que é igual a $E = a^{-2}b^2 + a^2b^{-2} = 7$.

Problema 2

Um número natural de quatro dígitos, K, é chamado de *interessante* se o número formado pelos dois primeiros dígitos de K é duas vezes o número formado pelos dois últimos dígitos de K. Por exemplo, 2010 e 3216 são números *interessantes*.
Encontre o maior número natural *d* que divide todos os números *interessantes*.

Solução

Seja K = abcd um número interessante. Temos que ab = 2.cd. Por outro lado,
K = abcd = a.10^3 + b.10^2 + c. 10 + d = (a.10 + b)10^2 + c.10 + d = [2(c.10 + d)]10^2 + c.10 + d, que é o memo que K = (c.10 + d).2.10^2 + c.10 + d = (2.10^2 + 1).(c.10 + d) = 201.(c.10 + d).
Portanto, 201 é a resposta.

Problema 3

Matias está escrevendo numa folha de papel extensa os múltiplos inteiros de 23, sem espaços entre eles e começando com 23. Ou seja, Matias está escrevendo a sequência de números:

23466992115138161..............

Qual é o dígito que ocupará a posição 1500 na sequência que Matias está escrevendo?

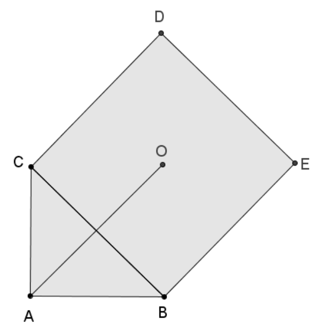
Solução

Existem somente 4 múltiplos de 23 com 2 dígitos: 23 = 23 . 1, 46 = 23 . 2, 69 = 23 . 3 e 92 = 23. 4. Quando Matias escrever esses quatro múltiplos de 23 ele terá escrito 8 dígitos.
Existem 39 múltiplos de 23 com 3 dígitos: 23 . 5 = 115, 138 = 23 . 6,......., 23 . 43 = 989.
Quando Matias escrever esses trinta e nove múltiplos de 23 ele terá escrito 117 dígitos.
Agora, observe que 1500 – (117 + 8) = 1500 – 125 = 1375 e que 1375 = 4 . 343 + 3.

Os múltiplos de 23 com 4 dígitos começam a partir de 23 . 44 = 1012. Quando Matias escrever o múltiplo 23 . 387 = 8901, terá escrito ao todo 8 + 3 . 39 + 4. 343 = 1497 dígitos. Portanto, restam 3 dígitos para completar os 1500, que será atingido quando ele escrever o terceiro dígito do próximo múltiplode 23, que será 23 . 387 = 8924. Portanto, a resposta é 2.

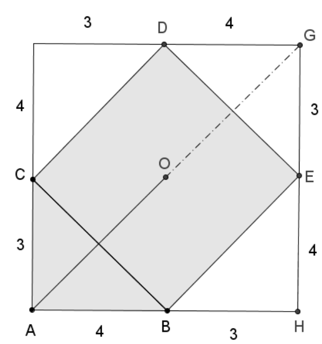
Problema 4

Na figura abaixo BCDE é um quadrado que possui um dos seus lados coincidindo com a hipotenusa do triângulo retângulo ABC. Se AB=4 e AC=3, determine a medida do segmento AO, onde O é o centro do quadrado BCDE.



Solução:

Construímos sobre os demais lados do quadrado BCDE triângulos congruentes ao triângulo ABC conforme ilustra a figura a seguir:



Com isso fica fácil de perceber duas coisas: A primeira é que a figura AFGH é um quadrado de lado AC+CF=3+4 =7 e a segunda é que o segmento AO é a metade da diagonal do quadrado AFGH. Ora como a medida da diagonal de um quadrado de lado ℓ é $\ell\sqrt{2}$, segue que $AO=\frac{7.\sqrt{2}}{2}$.

XXII OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO RIO GRANDE DO NORTE - ANO 2011

PROVA DA SEGUNDA ETAPA – Em 17/09/2011

Nível III (Ensino Médio)

Problema 1
Seja P o produto de todos os números ímpares de 1 até 2011.
Diga, justificando, qual é o dígito das unidades de P.
Solução

Observe que P = 1.3.5.7.9.11.....2009.2011 tem como um de seus fatores o número 5. Assim, P termina em 0 ou 5. Como P é o produto de ímpares, então P é ímpar.
Portanto, o dígito das unidades de P é 5.

Problema 2
Na cantina ***peso honesto*** há uma balança de pratos que não está bem regulada, de modo que ao colocarmos um peso de 1,0 kg em cada um dos seus pratos a balança fica desequilibrada para uma dos seus lados conforme ilustra a figura abaixo:

Um dia, o Sr. José vai a cantina ***peso honesto*** comprar um quilograma de açúcar que é pesado diante dos seus olhos na bendita balança defeituosa. No dia seguinte, o Sr. José retorna a cantina ***peso honesto*** para comprar mais um quilo de açúcar, mas, desconfiado sobre a honestidade da balança, ele exige que as posições do pacote de açúcar e do peso de 1,0 kg usado para fazer a pesagem sejam invertidas em relação a posição do dia anterior.

Diga, justificando, se ao final dos dois dias, o Sr. José levou para casa exatamente 2,0 kg, menos de 2,0 kg ou mais de 2,0 kg de açúcar.

Solução:

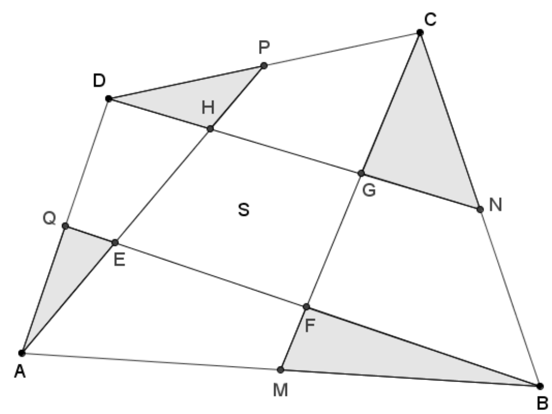
Pondo massas m_1 e m_2 em cada um dos pratos da balança, ela ficará equilibrada quando $m_1.a = m_2.b$, onde a e b são os comprimento dos braços da balança em cada um dos seus lados.
Suponha que a verdadeira massa de açúcar posta no primeiro dia seja de x kg. Assim, para manter o equilíbrio da balança no primeiro dia tem-se $x.a = b.1$. Sendo y kg a verdadeira massa de açúcar posta na balança no segundo dia, para manter o equilíbrio da balança é necessário que $1.a = y.b$. Assim,

$$\begin{cases} x.a = b.1 \\ 1.a = y.b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x.a = b \\ a = y.b \end{cases} \Rightarrow x.(y.b) = b \Rightarrow x.y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

O portanto a massa total de açúcar adquirido pelo Sr. José nos dois dias foi $x + y = x + \frac{1}{x}$. Mas $x + \frac{1}{x} \geq 2, \forall x > 0$, pois pela desigualdade das médias aritmética e geométrica temos $M_A \geq M_G \Rightarrow \frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x\frac{1}{x}} \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$. Mais ainda; a igualdade ocorre se, e semente se $x = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$, pois $x > 0$. Ora, como $x \neq 1$, pois a balança não é honesta (e portanto no primeiro dia a massa de açúcar comprada não era de 1,0kg), segue que $x + \frac{1}{x} > 2$ e portanto o Sr. José levou para casa mais de 2,0kg de açúcar ao final dos dois dias.

Problema 3

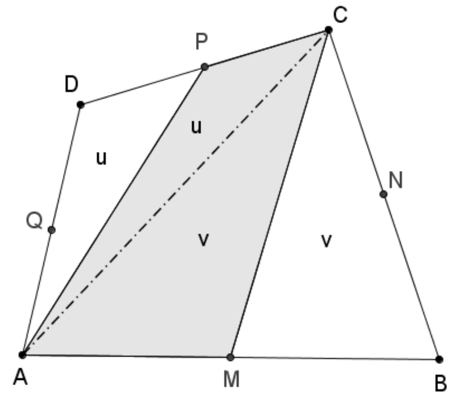
No quadrilátero ABCD da figura abaixo, os pontos M, N, P e Q são pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA.



Sabendo que a medida da área hachurada é de 20 cm^2. Determine a medida da área s do quadrilátero EFGH.

Solução:

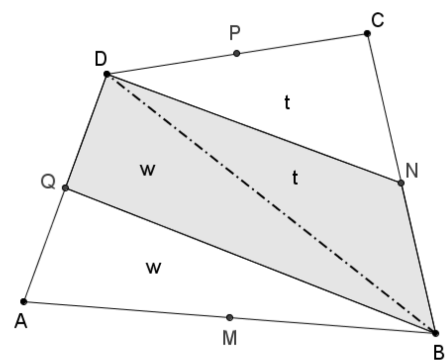
Na figura abaixo, note os triângulos APD e ACP possuem a mesma área (=u) por possuírem mesma base e a mesma altura (uma vez que P é o ponto médio de CD). Na mesma figura, os triângulos ACM e BCM também possuem a mesma área (=v), pois possuem a mesma base e a mesma altura (um vez que M é ponto médio de AB)



Observando a figura acima, é fácil perceber que

$$2u + 2v = A_{total} \Rightarrow u + v = \frac{1}{2} A_{total}$$

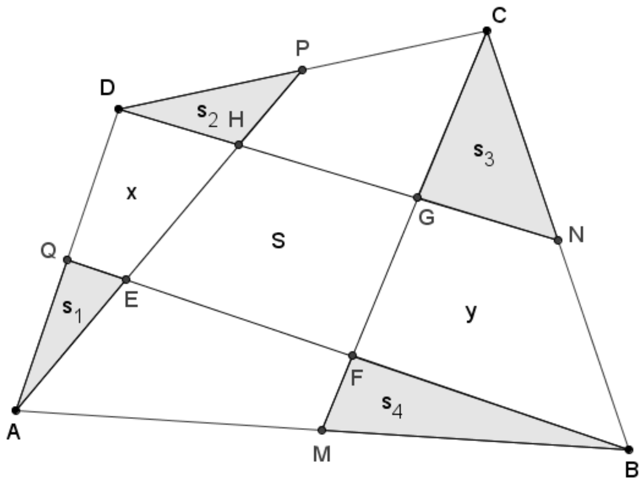
Analogamente, na figura abaixo, os triângulos CDN e BDN possuem a mesma área (=t), pois possuem a mesma base e a mesma altura (uma vez que N é ponto médio de BC) e os triângulos ABQ e BDQ também possuem a mesma área (=w) pois possuem a mesma base e a mesma altura (uma vez que Q é ponto médio de DA)



Observando a figura acima é fácil perceber que

$$2t + 2w = A_{total} \Rightarrow t + w = \frac{1}{2} A_{total}$$

Agora, voltando a figura original, marquemos as áreas x e y



Pelas observações iniciais que fizemos, segue que

$$(s_1 + x + s_2) + (s_3 + y + s_4) = \frac{1}{2} A_{total}$$

$$x + s + y = \frac{1}{2} A_{total}$$

Assim,

$$x + s + y = (s_1 + x + s_2) + (s_3 + y + s_4) \Rightarrow s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 \Rightarrow s = 20cm^2$$

Problema 4

Cada um dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 é pintado com uma das cores: vermelho, azul ou marrom, de tal modo que cada número vermelho seja igual à soma de um número azul e um número marrom.

Qual é a maior quantidade possível de números que pode ser pintado de vermelho?

Solução

Sejam v, a, m as quantidades de números pintados de vermelho, azul e marrom, respectivamente.

Assim, $v + a + m = 9$.

Suponha que seja possível pintar $v \geq 5$ números de vermelho.

Como $5 + a + m \leq v + a + m = 9$, temos que $a + m \leq 4$.

Agora, observe que, como tem a números pintados de azul e m números pintados de marrom, podemos ter a.m possíveis somas de um número pintado de azul com um número pintado de marrom, sendo que algumas delas podem ser iguais. Logo, $v \leq am$.

Assim, $a + m \leq 4 \Rightarrow v \leq am \leq 4$. Contradição, pois tínhamos suposto $v \geq 5$.

Portanto, nas condições do problema, a quantidade de números que sejam pintados de vermelho é menor do que ou igual a 4.

Uma possível pintura com v = 4 seria: Vermelho: 5, 7, 8, 9

Azul: 1, 2, 3

Marrom: 4, 6.

Neste caso, teríamos: 5 = 1 + 4; 7 = 3 + 4; 8 = 2 + 6; 9 = 3 + 6.