XXI Olimpíada de Matemática do Estado do Rio Grande do Norte

Prova do Nível I – Em 25/09/2010

Problema 1

Um professor de Matemática definiu a seguinte operação entre dois números naturais:

$a \otimes b =$ o menor múltiplo comum entre a e bo maior divisor comum entre a e b

Ele exemplificou o funcionamento da sua operação calculando: $12 \otimes 30 = 606 = 10$. Em

seguida, pediu aos seus estudantes que calculassem $4 \otimes 6 \otimes 16$.

Qual foi o valor correto encontrado pelos estudantes?

Problema 2

Temos 9 bolas de mesma cor e de mesmo tamanho, uma das quais pesa menos do que as outras, mas que não sabemos qual é.

Usando uma balança de dois pratos, qual é a *menor* quantidade de pesagens que se deve fazer para identificar a bola mais leve? Justifique sua resposta.

Problema 3

Maria e José disputam um jogo de cartas com um baralho que consiste de 40 cartas de quatro naipes distintos, numeradas de 1 a 10. No início do jogo, cada jogador tem 20 cartas. Uma jogada consiste em escolher uma de suas cartas e colocá-la sobre a mesa. Se algumas cartas sobre a mesa são numeradas com números que somam 15, elas são retiradas do jogo. Se a soma pode ser obtida de várias maneiras, o jogador que fez a última jogada decide quais cartas serão retiradas. No final do jogo sobrou somente uma carta sobe a mesa, numerada com o número 9. Neste momento, José tem somente as cartas numeradas com os números 3 e 5, e Maria ficou com somente uma carta.

Qual é o número da carta de Maria?

Problema 4

Em uma tira de papel muito comprida se escrevem os múltiplos inteiros positivos de 21, sem espaços entre eles. Os números iniciais dessa sequência são:

2142638410512614716 8......

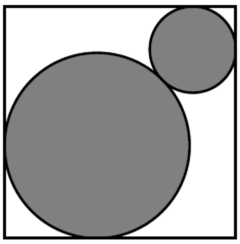
Diga, justificando, que dígito ocupa nesta sequência a *posição* 200.
(Por exemplo, a posição 8 é ocupada pelo dígito 4, que pertence ao número 84; a posição 15 é ocupada pelo dígito 1, que pertence ao número 147)

XXI Olimpíada de Matemática do Estado do Rio Grande do Norte

Prova do Nível II – Em 25/09/2010

Problema 1

Dois círculos, de raios R e r, respectivamente, são inscritos num quadrado de lado 1, veja figura a seguir.



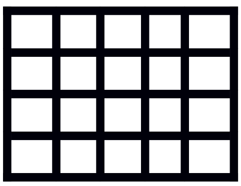
Calcule a soma R + r.

Problema 2

Maria e José disputam um jogo de cartas com um baralho que consiste de 40 cartas de quatro naipes distintos, numeradas de 1 a 10. No início do jogo, cada jogador tem 20 cartas. Uma jogada consiste em escolher uma de suas cartas e colocá-la sobre a mesa. Se algumas cartas sobre a mesa são numeradas com números que somam 15, elas são retiradas do jogo. Se a soma pode ser obtida de várias maneiras, o jogador que fez a última jogada decide quais cartas serão retiradas. No final do jogo sobrou somente uma carta sobe a mesa, numerada com o número 9. Neste momento, José tem somente as cartas numeradas com os números 3 e 5, e Maria ficou com somente uma carta.
Qual é o número da carta de Maria?

Problema 3

Quando Joãozinho tenta cobrir os quadrados unitários de um tabuleiro 5 x 5, Figura 1 abaixo, com 8 peças tipo gancho, formadas por três quadrados unitários, veja Figura 2 abaixo, percebe que sempre 1 quadrado unitário fica livre.



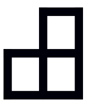


Figura 1 Figura 2

Diga, justificando, quais são os possíveis quadrados unitários do tabuleiro 5 x 5 que ficam livre depois das diversas tentativas de Joãozinho para cobrir o tabuleiro.
(Não considere como distintas as possibilidades obtidas a partir de rotações do tabuleiro)

Problema 4

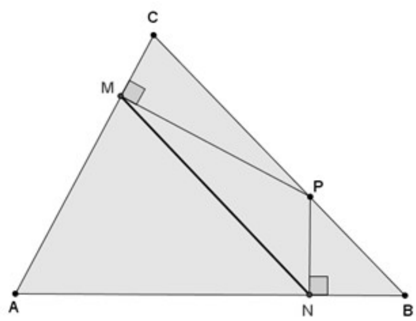
Seja A um subconjunto de $\{1, 2, 3, ...,100\}$ com n elementos, tais que a soma de quaisquer dois deles *não* seja divisível por 3.
Encontre o maior valor possível para n.

XXI Olimpíada de Matemática do Estado do Rio Grande do Norte

Prova do Nível III – Em 25/09/2010

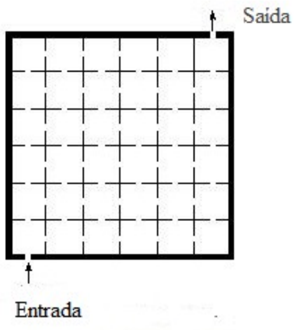
Problema 1

No triângulo ABC, da figura a seguir, o ponto P pode deslizar livremente sobre o lado BC. A partir de P são traçados os segmentos PM e PN que são perpendiculares aos lados AB e AC, respectivamente.
Determine a posição do ponto P para que o comprimento do segmento MN seja o *menor* possível.



Problema 2

Uma escola tem um prédio contendo 36 salas de laboratórios. Todas as salas são quadradas e dispostas como um tabuleiro 6 por 6. O prédio tem uma única entrada e uma única saída. Cada sala se comunica com as vizinhas por uma porta no meio de cada parede interior, veja figura a seguir.



Um professor de Matemática propôs entregar uma medalha ao estudante da escola que entrasse no conjunto dos laboratórios e visitasse uma única vez cada sala antes de deixar o prédio.
Diga, justificando, se algum estudante conseguiu ganhar a medalha.

Problema 3
Uma sequência é gerada listando, do maior para o menor, para cada número inteiro positivo, os múltiplos de N até atingir N^2. Ou seja, a sequência inicia com os números:

1, 2, 4, 3, 6, 9, 4, 8, 12, 16, 5, 10, 15, 20, 25, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 7, 14, 21, ...

Diga, justificando, qual é o número inteiro que ocupa na sequência a posição 2010.

Problema 4
2010 bolas, numeradas de 1 a 2010, são colocadas em caixas de modo que se uma caixa contém a bola de número M então ela *não* pode conter nenhuma outra bola que seja múltiplo de M.
Qual é o *menor* número de caixas necessárias para distribuir as bolas?