XXI Olimpíada de Matemática do Estado do Rio Grande do Norte

Prova do Nível I – Em 25/09/2010

Problema 1
Um professor de Matemática definiu a seguinte operação entre dois números naturais:

$$a \otimes b = \frac{o\ menor\ múltiplo\ comum\ entre\ \ a\ \ e\ \ b}{o\ maior\ divisor\ comum\ entre\ a\ \ e\ b}$$

Ele exemplificou o funcionamento da sua operação calculando: $12 \otimes 30 = \frac{60}{6} = 10.$ Em seguida, pediu aos seus estudantes que calculassem $(4 \otimes 6) \otimes 16.$

Qual foi o valor correto encontrado pelos estudantes?

Solução

$$4 \otimes 6 = \frac{menor\ múltiplo\ comum\ entre\ 4\ e\ 6}{o\ maior\ divisor\ comum\ entre\ 4\ e\ 6} = \frac{12}{2} = 6$$

.
Agora,

$$(4 \otimes 6) \otimes 16 = 6 \otimes 16 = \frac{menor\ múltiplo\ comum\ entre\ 6\ e\ 16}{o\ maior\ divisor\ comum\ entre\ 6\ e\ 16} = \frac{48}{2} = 24$$

.
Problema 2
Temos 9 bolas de mesma cor e de mesmo tamanho, uma das quais pesa menos do que as outras, mas que não sabemos qual é.
Usando uma balança de dois pratos, qual é a *menor* quantidade de pesagens que se deve fazer para identificar a bola mais leve? Justifique sua resposta.
Solução

Duas pesagens são suficientes para identificar a bola mais leve.
Separamos as bolas em três grupos disjuntos de três bolas cada. Escolhemos aleatoriamente dois grupos e colocamos um em cada prato da balança. Podem ocorrer duas coisas:
(i) Os pratos da balança ficam equilibrados.
Neste caso, a bola mais leve está no outro grupo de três bolas. Com duas bolas quaisquer desse grupo, fazemos uma segunda pesagem, colocando uma bola em cada prato da balança. Se os pratos da balança ficarem equilibrados, a bola mais leve é a que ficou de fora. Se um prato ficar mais alto que o outro, a do prato mais alto é a bola mais leve.
(ii) Se os pratos da balança ficarem desequilibrados.
Neste caso, fazemos uma segunda pesagem com duas bolas quaisquer do prato mais alto, colocando uma em cada um dos pratos. Se os pratos da balança ficarem equilibrados, a bola mais leve é a que ficou de fora. Se um prato ficar mais alto que o outro, a do prato mais alto é a bola mais leve.

Problema 3

Maria e José disputam um jogo de cartas com um baralho que consiste de 40 cartas de quatro naipes distintos, numeradas de 1 a 10. No início do jogo, cada jogador tem 20 cartas. Uma jogada consiste em escolher uma de suas cartas e colocá-la sobre a mesa. Se algumas cartas sobre a mesa são numeradas com números que somam 15, elas são retiradas do jogo. Se a soma pode ser obtida de várias maneiras, o jogador que fez a última jogada decide quais cartas serão retiradas. No final do jogo sobrou somente uma carta sobe a mesa, numerada com o número 9. Neste momento, José tem somente as cartas numeradas com os números 3 e 5, e Maria ficou com somente uma carta.

Qual é o número da carta de Maria?

Solução

Suponha que a carta de Maria tem o número n. Seja j o número de jogadas efetuadas pelos dois até chegar a situação final. A soma dos números de todas as cartas é igual a

$$4(1 + 2 + 3 + ... + 10) = 4.55 = 220.$$

Portanto, pelos dados do problema, temos que: $220 = 3 + 5 + 9 + n + 15j$.

Assim, $203 = n + 15j$. Como n é menor do que 15, então n é o resto da divisão de 203 por 15. Por outro lado, $203 = 15.13 + 8$. Portanto, $n = 8$.

Problema 4

Em uma tira de papel muito comprida se escrevem os múltiplos inteiros positivos de 21, sem espaços entre eles. Os números iniciais dessa sequência são:

2142638410512614716 8......

Diga, justificando, que dígito ocupa nesta sequência a posição 200.

(Por exemplo, a posição 8 é ocupada pelo dígito 4, que pertence ao número 84; a posição 15 é ocupada pelo dígito 1, que pertence ao número 147)

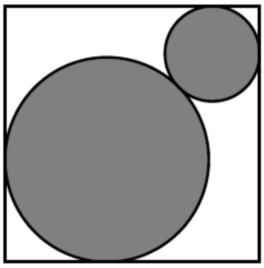
Solução

Existem somente 4 múltiplos de 21 com dois dígitos: 21.1 = 21, 21.2 = 42, 21.3 = 63 e 21.4 = 84. Os múltiplos de 21 com 3 dígitos são: 21.5 = 105, 21.6 = 126, ..., 21.47 = 987. Ou seja, temos (47 – 5) + 1 = 43. De modo que, para listar os múltiplos positivos de 21 até 987 escrevemos 2.4 + 3.43 = 8 + 129 = 137 dígitos. Quando listamos os múltiplos positivos de 21 com 4 dígitos de 21.48 = 1008 até 21.62 = 1302 escrevemos 4.[(62 – 48) + 1] = 60 dígitos. Como 137 + 60 = 197. Portanto, o dígito que está posição 200 é 2, que pertence ao múltiplo 21.63 = 1323.

XXI Olimpíada de Matemática do Estado do Rio Grande do Norte

Prova do Nível II – Em 25/09/2010

Problema 1
Dois círculos, de raios R e r, respectivamente, são inscritos num quadrado de lado 1, veja figura a seguir.



Calcule a soma R + r.
Solução

Pelo Teorema de Pitágoras, sabemos que a diagonal do quadrado de lado medindo 1 tem comprimento $\sqrt{2}$. Os centros dos círculos e o ponto onde eles se tocam dividem a diagonal em quatro partes de comprimentos $R\sqrt{2}, R, r, r\sqrt{2}$. Por outro lado, o comprimento da diagonal do quadrado é igual a $\sqrt{2}$, que por sua vez é igual a:

$$\sqrt{2} = R\sqrt{2} + R + r + r\sqrt{2} = (R+r).(\sqrt{2}+1).$$

Portanto, $R + r = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right) = 2 - \sqrt{2}$.

Problema 2
Maria e José disputam um jogo de cartas com um baralho que consiste de 40 cartas de quatro naipes distintos, numeradas de 1 a 10. No início do jogo, cada jogador tem 20 cartas. Uma jogada consiste em escolher uma de suas cartas e colocá-la sobre a mesa. Se algumas cartas sobre a mesa são numeradas com números que somam 15, elas são retiradas do jogo. Se a soma pode ser obtida de várias maneiras, o jogador que fez a última jogada decide quais cartas serão retiradas. No final do jogo sobrou somente uma carta sobe a mesa, numerada com o número 9. Neste momento, José tem somente as cartas numeradas com os números 3 e 5, e Maria ficou com somente uma carta.
Qual é o número da carta de Maria?
Solução

Suponha que a carta de Maria tem o número n. Seja j o número de jogadas efetuadas pelos dois até chegar a situação final. A soma dos números de todas as cartas é igual a

$$4(1 + 2 + 3 + ... + 10) = 4.55 = 220.$$

Portanto, pelos dados do problema, temos que: $220 = 3 + 5 + 9 + n + 15j$.
Assim, $203 = n + 15j$. Como n é menor do que 15, então n é o resto da divisão de 203 por 15. Por outro lado, $203 = 15.13 + 8$. Portanto, $n = 8$.

Problema 3

Quando Joãozinho tenta cobrir os quadrados unitários de um tabuleiro 5 x 5, Figura 1 abaixo, com 8 peças tipo gancho, formadas por três quadrados unitários, veja Figura 2 abaixo, percebe que sempre 1 quadrado unitário fica livre.

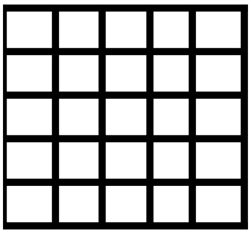


Figura 1

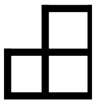
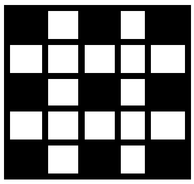


Figura 2

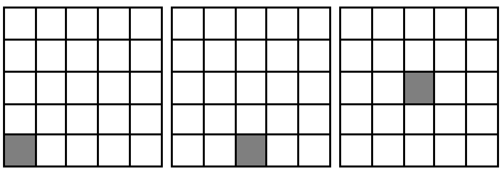
Diga, justificando, quais são os possíveis quadrados unitários do tabuleiro 5 x 5 que ficam livre depois das diversas tentativas de Joãozinho para cobrir o tabuleiro?
(Não considere como distintas as possibilidades obtidas a partir de rotações do tabuleiro)

Solução

Pinte o tabuleiro 5 x 5 dado da maneira mostrada abaixo.



Como, na tentativa de Joãozinho de cobrir o tabuleiro, cada peça tipo gancho não pode cobrir mais do que um quadrado preto, seriam necessárias 9 peças tipo gancho para cobrir todo o tabuleiro. Assim, os possíveis quadrados unitários livres estão nas posições mostradas abaixo:



Problema 4

Seja A um subconjunto de {1, 2, 3, ...,100} com *n* elementos, tais que a soma de quaisquer dois deles *não* é divisível por 3.
Encontre o maior valor possível para *n*.

Solução

O conjunto {1, 2, 3, ...,100} pode ser escrito como uma união disjunta de três conjuntos:

$$\{1, 2, 3, ..., 100\} = M \cup K \cup L, \text{ onde}$$

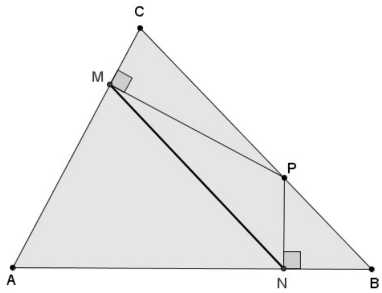
M = {3, 6, 9, 12, ..., 99} = {3s; s é um número natural e ;
K = {1,7, 10, 13, ..., 100} = {3s + 1; s é um número natural e e
L = {2, 5, 8, 11, ..., 98} = {3s + 2; s é um número natural e
Observe que os elementos de M são todos os números naturais pertencentes a {1, 2, 3, ...,100} que deixam resto zero na divisão por 3. Os elementos de K são todos os números naturais que pertencem a {1, 2, 3, ...,100} e deixam resto 1 na divisão por 3. Os elementos de L são todos os números naturais pertencentes a {1, 2, 3, ...,100} e que deixam resto 2 na divisão por 3. Dos três, K é subconjunto com maior número de elementos.
Agora, observe que, se somamos dois elementos quaisquer de K, não obteremos um múltiplo de 3. Do mesmo modo, se somamos um elemento qualquer de K com um elemento qualquer de M, não obteremos um número divisível por 3. Portanto, o maior valor possível para *n* é igual a:
(número de elementos de K) + 1 = 34 + 1 = 35.

XXI Olimpíada de Matemática do Estado do Rio Grande do Norte

Prova do Nível III – Em 25/09/2010

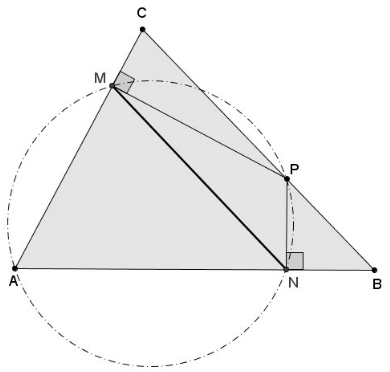
Problema 1

No triângulo ABC da figura abaixo o ponto P pode deslizar livremente sobre o lado BC. A partir de P são traçados os segmentos PM e PN que são perpendiculares aos lados AB e AC , respectivamente. Determine a posição do ponto P para que o comprimento do segmento MN seja o **menor** possível.

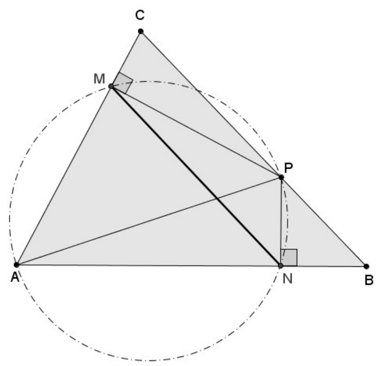


Solução

Inicialmente, note que o quadrilátero AMPN é circunscritível, pois os ângulos AMP e ANP são retos e portanto as medidas dos ângulos AMP e ANP somam 180° , o que implica que m(MAN) + m(MPN) = 180°, visto que num quadrilátero a soma das medias dos ângulos internos deve ser sempre 360°. Na figura abaixo, desenhamos a circunferência que passa pelos pontos A, M, P e N.



Note que AP é o diâmetro desta circunferência (o triângulo APM é retângulo em M e, portanto, está inscrito na semi-circunferência. A figura abaixo mostra a referida circunferência com o seu diâmetro AP



Aplicando a lei dos senos no ΔAMN segue que

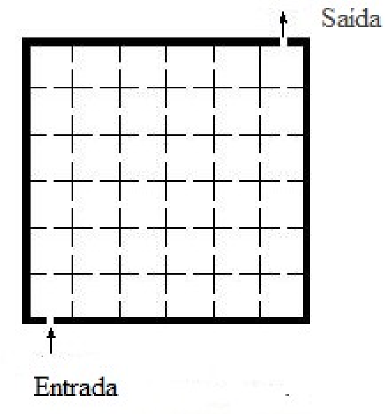
$$\frac{MN}{sen\,A} = 2R \Rightarrow MN = 2R\,sen\,A \Rightarrow MN = AP.sen\,A$$

Como sen A é fixo, pois o ângulo A é fixo , segue que MN será mínimo quando AP for mínimo. Ora, mas AP é a distância do vértice A do triângulo ABC ao lado BC e, assim, essa distância será mínima quando AP for perpendicular ao lado BC. Noutras palavras, MN será mínimo quando P for o **pé da altura** traçada do vértice A ao lado BC.

Problema 2

Uma escola tem um prédio contendo 36 salas de laboratórios. Todas as salas são quadradas e dispostas como um tabuleiro 6 por 6. O prédio tem uma única entrada e uma única saída.

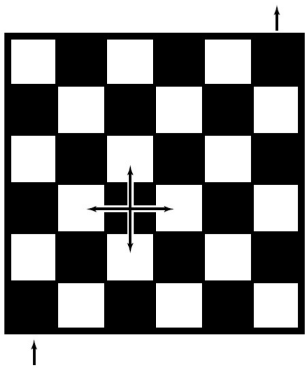
Cada sala se comunica com as vizinhas por uma porta no meio de cada parede interior, veja figura a seguir.



Um professor de Matemática propôs entregar uma medalha ao estudante da escola que entrasse no conjunto dos laboratórios e visitasse uma única vez cada sala antes de deixar o prédio.
Diga, justificando, se algum estudante conseguiu ganhar a medalha.

Solução

Pinte o mapa do laboratório como se fosse um tabuleiro:



Com a pintura, você observa que se vai de uma sala preta para uma sala branca, e vice-versa.
Assim, ao percorrer as salas do laboratório, o aluno caminha alternando as cores das salas:

preta → branca → preta → branca → preta → ....

Suponha que exista um caminho passando por todas as salas uma única vez, entrando na sala preta do canto inferior esquerdo e saindo na sala preta do canto superior direito. Como o caminho alterna as cores das salas, e existe um número igual de salas de ambas as cores, o estudante teria que terminar numa sala branca, mas ele termina numa sala preta. Portanto, é impossível.

Problema 3

Uma sequência é gerada listando, do maior para o menor, para cada número inteiro positivo, os múltiplos de n até atingir n^2. Ou seja, a sequência inicia com os números:

1, **2**, 4, **3**, 6, 9, **4**, 8, 12, 16, **5,** 10, 15, 20, 25, **6**, 12, 18, 24, 30, 36, **7**, 14, 21, ...

Diga, justificando, qual é o número inteiro que ocupa na sequência a posição 2010.

Solução

Para cada inteiro positivo k , na sequência existe exatamente k múltiplos de k, que podem ser vistos como agrupados em múltiplos de 1 (como $1^2 = 1$, este grupo só tem próprio o 1), múltiplos de 2, múltiplos de 3 etc. Veja que, quando olhamos para os agrupamentos dos múltiplos, existe um único múltiplo de 1, 2 múltiplos de 2, 3 múltipos de 3,...., k múltiplos de k *etc.* Portanto, o número n^2 na sequência ocupa a posição $1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Como $63^3 = 3969$ está na posição $\frac{63.64}{2} = 2016$, então 63^3 ocorre $2016 – 2010 = 6$ termos depois do termo da sequência que está na posição 2010. Assim, o termo 2010 é igual a:

$63^2 – 6.(63) = 3591$.

Problema 4

2010 bolas, numeradas de 1 a 2010, são colocadas em caixas de modo que se uma caixa contém a bola de número m então ela *não* pode conter nenhuma outra bola que seja múltiplo de m.

Qual é o *menor* número de caixas necessárias para distribuir as bolas?

Solução

A resposta é 11.

Vamos nomear as caixas como $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}$.

Na caixa 1, colocamos somente a bola numerada com 1.

Na caixa 2, colocamos as bolas 2 e 3. Isto é, as bolas numeradas com k, tais que $2 \leq k < 2^2$

Na caixa numerada com 2^2, colocamos as bolas 4, 5, 6, 7. Isto é, todas as bolas numeradas com k, tais que $2^2 \leq k < 2^3$.

Na caixa numerada com 2^3, colocamos as bolas 8, 9, 10, 11, 12, 13 , 14, 15. Isto é, todas as bolas numeradas com k, tais que $2^3 \leq k < 2^4$. E assim por diante, até a caixa numerada com 2^{10}, que colocamos as bolas numeradas com k, tais que $2^{10} \leq k < 2010 < 2^{11}$.

Em cada uma dessas caixas, os números das bolas satisfazem a condição do problema. Isto é, nenhum deles é múltiplo do número da caixa.

Se existe um número de caixas menor do que 11, então duas potências de 2 vão estar na mesma caixa, o que é uma contradição. Logo, $m = 11$ é o *menor* número de caixas necessárias para distribuir as bolas.