POLINÔMIOS SIMÉTRICOS

Carlos A. Gomes, UFRN, Natal/RN.

*** Nível Intermediário**

Uma ferramenta bastante útil na resolução de problemas algébricos de fatoração, na resolução de sistemas de equações não lineares, na resolução de algumas equações irracionais são as funções polinomiais simétricas, que apesar de seu grande poder algébrico são pouco divulgadas entre os nossos alunos. A finalidade deste breve artigo é exibir de modo sucinto como estas ferramentas podem ser úteis na resolução de alguns problemas olímpicos.

I.Polinômios Simétricos

Um polinômio f, a duas variáveis x, y, é dito simétrico quando f (x, y) = f (y, x) para todos os valores x, y.

Exemplos:

a) $\sigma_1 = x + y$ e $\sigma_2 = x \,.\, y$, são evidentemente polinômios simétricos (chamados polinômios simétricos elementares).

b) Os polinômios da forma $S_n = x^n + y^n$, com $n \in N$ também são simétricos. Um fato importante a ser observado é que um polinômio simétrico f (x, y) pode ser representado como um polinômio em função de σ_1 e σ_2. Vejamos:

Se $S_n = x^n + y^n$, $n \in N$, $(n \geq 2)$, então:

$$S_n = x^n + y^n = (x + y)\,(x^{n-1} + y^{n-1}) - xy\,(x^{n-2} + y^{n-2}) = \sigma_1 \,.\, S_{n-1} - \sigma_2 \,.\, S_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

Mas,

$S_0 = x^0 + y^0 = 1 + 1 = 2$

$S_1 = x^1 + y^1 = x + y = \sigma_1$

Assim temos que:

$S_0 = 2$

$S_1 = \sigma_1$

$S_2 = \sigma_1 \,.\, S_1 - \sigma_2 .\, S_0 = \sigma_1 \,.\, \sigma_1 - \sigma_2 \,.\, 2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$

$S_3 = \sigma_1 \,.\, S_2 - \sigma_2 .\, S_1 = \sigma_1\,(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2 \,.\, \sigma_1 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1 .\, \sigma_2$

E daí usando a lei de recorrência $S_n = \sigma_1 S_{n-1} - \sigma_2 S_{n-2}$ $(n \geq 2)$ podemos determinar S_n em função de σ_1 e σ_2 para qualquer número natural n.

Agora para garantirmos a afirmação anterior que todo polinômio simétrico f (x, y) pode ser representado como um polinômio em σ_1 e σ_2 observemos o seguinte fato:

Num polinômio simétrico f (x, y) para os termos da forma $\mathbf{a \,.\, x^K \,.\, y^K}$ não temos nenhum problema pois $\mathbf{a \,.\, x^K \,.\, y^K = a\,(x \,.\, y)^K = a \,.\, \sigma_2^K}$. Agora com os termos da forma

$\mathbf{b \cdot x^i \cdot y^K}$, com i < k devemos observar o seguinte fato: Como, por hipótese, f (x, y) é simétrico se $\mathbf{b \cdot x^i \cdot y^k}$, com i < k estiver presente em f (x, y) temos que $\mathbf{b \cdot x^k \cdot y^i}$ também deve estar presente em f (x, y), visto que deve ser satisfeita a condição f (x, y) = f (y, x). Assim se agruparmos os termos $\mathbf{b \cdot x^i \cdot y^k + b \cdot x^k \cdot y^i}$ (i < k) temos que:

$$\mathbf{b \cdot x^i \cdot y^k + b \cdot x^k \cdot y^i = b \cdot x^i \cdot y^i (x^{k-i} + y^{k-i}) = b.\ \sigma_2^{\,i} \cdot S_{k-i}}\ ,$$

mas como já mostramos anteriormente S_{k-i} pode ser escrito como um polinômio em σ_1 e σ_2, pois $k - i \in \mathbb{N}$, visto que i < k.

II.Exemplos Resolvidos

01.(Funções simétricas elementares a 3 variáveis)

Definido:

$\sigma_1 = x + y + z$
$\sigma_2 = xy + xz + yz$
$\sigma_3 = x \cdot y \cdot z$
$S_n = x^n + y^n + z^n$, com $n \in$ N. ($n \geq 2$)

Mostre que:

a) $S_n = \sigma_1 \cdot S_{n-1} - \sigma_2 \cdot S_{n-2} + \sigma_3 \cdot S_{n-3}$ ($n \geq 3$, com $n \in$ N)

b) $S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$

Resolução:

Observe inicialmente que:

$$x^n + y^n + z^n = (x + y + z)\ (x^{n-1} + y^{n-1} + z^{n-1}) - (xy + xz + yz)\ (x^{n-2} + y^{n-2} + z^{n-2}) + xyz\ (x^{n-3} + y^{n-3} + z^{n-3})$$

e daí temos que:

$$S_n = \sigma_1 \cdot S_{n-1} - \sigma_2 \cdot S_{n-2} + \sigma_3 \cdot S_{n-3} \quad (n \geq 3, \text{ com } n \in \mathbb{N})$$

Agora temos que:

$S_0 = x^0 + y^0 + z^0 = 1 + 1 + 1 = 3$
$S_1 = x + y + z = \sigma_1$
$S_2 = x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2\ (xy + xz + yz) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$

Agora fazendo n = 3 temos na lei de recorrência $S_n = \sigma_1 \cdot S_{n-1} - \sigma_2 \cdot S_{n-2} + \sigma_3 \cdot S_{n-3}$ temos que:

$$S_3 = \sigma_1 \cdot S_2 - \sigma_2 \cdot S_1 + \sigma_3 \cdot S_0 = \sigma_1\ (\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2 \cdot \sigma_1 + \sigma_3 \cdot 3$$
$$S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1 \cdot \sigma_2 + 3\sigma_3$$

02.

a) Fatore $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

Resolução:

Essa velha e manjada questão continua ainda hoje pegando alguns bons professores e alunos. A sua solução pelos métodos tradicionais envolve uma boa dose de atenção e de paciência para aplicar velhos "truques" de fatoração, por outro lado ela é imediata usando os polinômios simétricos. Vejamos:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = S_3 - 3 \, . \, \sigma_3$$

Mas de acordo com a questão anterior $S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$ e daí temos que $S_3 - 3\sigma_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$. Assim:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= S_3 - 3\sigma_3 = \\ &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = \\ &= \sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) = \\ &= [(x + y + z)^2 - 3(xy + xz + yz)] \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + + z^2 - xy - xz - yz) \end{aligned}$$

Obs. (para os mais curiosos): Na RPM 41, pág.38 existe uma bela resolução desse problema usando um determinante.

b) Usando a fatoração obtida em (a), verifique a famosa desigualdade das médias aritmética e geométrica. Se a, b, c $\in$ R_+ então $\sqrt[3]{a.bc} \leq \frac{a+b+c}{3}$ e a igualdade ocorre, se, e somente se, a = b = c.

De fato, em (a) verificamos que

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$

Vamos mostrar inicialmente que se x, y, z são números reais positivos então:

$$(x + y + z) \, . \, (x^2 + y^2 + z^2 - xy - xy - yz) \geq 0$$

De fato,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz + yz &= \frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2zy) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2xz + z^2 + y^2 - 2yz + z^2) \\ &= \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2] \geq 0 \text{ (Soma de quadrados)} \end{aligned}$$

Ora, como estamos supondo x, y, z reais positivos temos que $x + y + z \geq 0$ e daí $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \geq 0$ (pois é o produto de fatores ≥ 0). Assim temos que:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \geq 0$$

e daí

$$3xyz \le x^3 + y^3 + z^3 \Rightarrow xyz \le \frac{x^3+y^3+z^3}{3}$$

fazendo $x^3 = a$, $y^3 = b$ e $z^3 = c$ temos que:

$$\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}.\sqrt[3]{c} \le \frac{a+b+c}{3}$$

e daí

$$\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3}$$

Com a igualdade ocorrendo se e somente se a = b = c, pois em $(x + y + z).(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \ge 0$ a igualdade ocorre apenas quando x = y = z, visto que x + y + z > 0, uma vez que x, y, z são números reais positivos e além disso,

$$(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2] = 0 \Leftrightarrow x = y = z.$$

:**03.** Fatore $(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3)$

Resolução:

$(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = \sigma_1^3 - S_3$

Mas, no exemplo anterior vimos que $S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$ e daí

$$\begin{aligned}(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) &= \sigma_1^3 - (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3)\\ &= 3.\ (\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3)\\ &= 3.\ [(x + y + z)\ (xy + xz + yz) - xyz]\\ &= 3.(x^2y + x^2z+ xyz+ xy^2 + xyz+ y^2z + xyz+ xz^2 + yz^2 - xyz)\\ &= 3.\ [xy\ (x + y) + xz\ (x + y) + yz\ (y + z) + xz\ (y + z)]\\ &= 3.\ [(x + y)(xy + xz) + (y + z)(yz + xz)]\\ &= 3.\ [(x + y)\ .\ x\ (y + z) + (y + z)\ .\ z\ (x + y)]\\ &= 3.\ (x + y)(y + z)(x + z)\end{aligned}$$

04. Se x_1 e x_2 são as raízes da equação $x^2 - 6x + 1 = 0$ determine o valor de $x_1^5 + x_2^5$.

Resolução:

Fazendo $S_n = x_1^n + x_2^n$, $n \in N$, queremos determinar $S_5 = x_1^5 + x_2^5$

Temos que:

$\sigma_1 = x_1 + x_2 = 6$
$\sigma_2 = x_1 . x_2 = 1$
$S_0 = x_1^0 + x_2^0 = 1 + 1 = 2$
$S_1 = x_1 + x_2 = 6$
$S_n = \sigma_1 . S_{n-1} - \sigma_2 . S_{n-2} = 6 S_{n-1} - S_{n-2}$

e daí

$S_2 = 6 . S_1 - S_0 = 6 . 6 - 2 = 34$
$S_3 = 6 . S_2 - S_1 = 6 . 34 - 6 = 198$
$S_4 = 6 . S_3 - S_2 = 6 . 198 - 34 = 1.154$
$S_5 = 6 . S_4 - S_3 = 6 . 1.154 - 198 = 6.726$
Assim $x_1^5 + x_2^5 = 6.726$

04. Determine todas as soluções reais do sistema

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^3+y^3+z^3+xyz = x^4+y^4+z^4+1 \end{cases}$$

De acordo com o sistema acima temos que:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1 \\ S_3+\sigma_3 = S_4+1 \end{cases}, \text{onde } S_n = x^n+y^n+z^n, n \in N$$

Mas, $S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_2\sigma_1 + 3\sigma_3$ e $S_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1. \sigma_3$ (verifique isto!) e daí

$S_3 + \sigma_3 = S_4 + 1 \Rightarrow \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 + \sigma_3 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2 \sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 1$

Como $\sigma_1 = 1$ temos que:

$$1 - 3\sigma_2 + 4\sigma_3 = 1 - 4\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_3 + 1 \Rightarrow 2\sigma_2^2 - \sigma_2 + 1 = 0$$

Como, $\Delta = (-1)^2 - 4 . 2 . 1 = -7 < 0$, concluímos que existem raízes reais.

Uma outra aplicação interessante dos polinômios simétricos pode ser encontrada na resolução de algumas equações irracionais. Vejamos:

05. Determine todas as raízes reais da equação abaixo:

$$\sqrt[4]{272-x} + \sqrt[4]{x} = 6$$

Resolução:

Fazendo $\sqrt[4]{x} = y$ e $\sqrt[4]{272-x} = z$ temos que

$$x = y^4 \text{ e } 272 - x = z^4 \Rightarrow \begin{cases} y+z=6 \\ y^4+z^4=272 \end{cases}$$

e agora lembrando que : $\sigma_1 = y + z$ e $\sigma_2 = y. z$ e $S_n = y^n + z^n$, com $n \in N$

$$\begin{cases} \sigma_1 = 6 \\ S_4 = 272 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 6 \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2.\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 272 \end{cases}$$

Logo, $6^4 - 4 . 6^2. \sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 272 \Rightarrow \sigma_2^2 - 72\sigma_2 + 512 = 0 \Rightarrow \sigma_2 = 64$ ou $\sigma_2 = 8$

Assim, se $\sigma_2 = 64 \Rightarrow \begin{cases} y+z=6 \\ y.z=64 \end{cases} \Rightarrow$ Não existem soluções reais.

Por outro lado, se $\sigma_2 = 8 \Rightarrow \begin{cases} y+z=6 \\ y.z=8 \end{cases} \Rightarrow$ y = 2 e z = 4 ou z = 2 e y = 4

Assim concluímos que:

$$y = 2 \Rightarrow x = 16$$
$$y = 4 \Rightarrow x = 256$$

Logo as raízes reais da equação são 16 e 256.

III. Problemas:

01. Se α, β e γ são as raízes da equação $x^3 + 3x^2 - 7x + 1 = 0$. Determine o valor de $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$

02. Mostre que se o sistema $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=b \\ x^3+y^3=c \end{cases}$ tem solução, então $a^3 - 3ab + 2c = 0$

03. x, y, z são números reais tais que $x + y + z = 5$ e $yz + zx + xy = 3$. Verifique que $-1 \le z \le \frac{13}{3}$.

04. Se $x + y + z = 0$, verifique que, para n = 0, 1, 2, ... vale a relação:

$$x^{n+3} + y^{n+3} + z^{n+3} = xyz\,(x^n + y^n + z^n) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)(x^{n+1} + y^{n+1} + z^{n+1})$$

05. Determine as raízes reais da equação $\sqrt[5]{33-x} + \sqrt[5]{x} = 3$.

06. Verifique que:

$$(x + y + z)^3 - (y + z - x)^3 - (x + z - y)^3 - (x + y - z)^3 = 24xyz.$$

07. Dados a, b e c números reais positivos tais que $\log_a b + \log_b c + \log_c a = 0$, determine o valor de $(\log_a b)^3 + (\log_b c)^3 + (\log_c a)^3$.

08. Se α, β e γ são números complexos tais que $\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3$ e $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=7$, determine o valor de $\alpha^{21}+\beta^{21}+\gamma^{21}$.

Referências:

[1] Barbeau, E. J., Polynomials – Problems books in Mathematics – Springer Verlag.
[2] Engel, Arthur , Problem-Solving Strategies – Springer Verlag.
[3] www.obm.org.br, Mathematical Excalibur.