Resolução dos problemas semanais

Data 19/02/2012

1.01.

Suponhamos que Lara tenha ficado com as bolas com os números ***a,b,c,*** e ***d*** *;* Patrícia com as bolas cujos números são ***e, f*** e ***g*** e finalmente Natália com as bolas cujos números sejam ***h*** e ***i.*** De acordo com o enunciado temos que:

$$\begin{cases} a+b+c+d=18 \\ e+f+g=15 \end{cases}$$

Ora, como 9 bolas são numeradas de 1 até 9, segue que a soma dos números presentes nas 9 bolas é $1+2+3+...+9=\dfrac{9(1+9)}{2}=45$. Sedo ***S*** a soma dos números presentes nas bolas que ficaram com Natália, segue que

$$\underbrace{(a+b+c+d)}_{=18}+\underbrace{(e+f+g)}_{=15}+\underbrace{(h+i)}_{=S}=45 \Rightarrow 18+15+S=45 \Rightarrow S=12$$

Fizemos isso porque poucas possibilidades para escolher dois entre os números 1,2,3,4,5,6,7,8 e 9 tal que a somas deles seja 12.

Como os números das bolas que ficaram com Natália tem soma 12, as possibilidades para as bolas que ficam com Natália são 3 e 9 ; 4 e 8 ou ainda 5 e 7. Diante disso temos as seguintes possibilidades para a distribuição das bolas

Natália	Patrícia	Lara
3 e 9	1,5 e 8	1,4,6 e 7
4 e 8	1,5 e 9	2,3,7 e 6
5 e 7	2,4 e 9	1,3,6 e 8

como, segundo o enunciado, nenhuma das garotas ficou com duas bolas com números consecutivos, segue que as bolas de cada uma são

Natália $\rightarrow$ 5 e 7.

Patrícia $\rightarrow$ 2,4 e 9.

Lara $\rightarrow$ 1,3,6 e 8.

2.01.

Suponhamos que existam *b* bolas brancas e *p* bolas pretas. De acordo com o enunciado, temos que $\frac{1}{11}b$ e $\frac{1}{13}p$ são números pares. Logo, $\frac{1}{11}b = 2m \Rightarrow b = 22m$, onde m é um número inteiro não negativo e $\frac{1}{13}p = 2n \Rightarrow p = 26n$, onde n é um inteiro não negativo. Por outro lado, temos que: $p \geq \frac{10}{11}b$ e $b \geq \frac{12}{13}p$, o que implica que $\frac{10}{11}b \leq p \leq \frac{13}{12}b$. Como 150 < b < 200 e *b* é múltiplo de 22, segue que *b* $\in$ {154, 176, 198}.

Portanto, as soluções são: *b* = 154 e *p* = 156 , *b* = 176 e p = 182 , *b* = 198 e *p* = 208.

3.01.

Sejam A,BC,D e E as cinco salas com 100 estudantes cada uma.Ora, como em cada sala há pelo menos 19 rapazes e 19 garotas vamos distribuir inicialmente 19 rapazes e 19 garotas em cada uma das cinco salas. Uma vez feita essa distribuição inicial restam 250-19x5=155 rapazes e 250-19x5=155 garotas para serem distribuídas entre as cinco salas. Como queremos formar um número mínimo de casais (composto por um garoto e por uma garota de uma mesma sala) vamos tentar completar cada uma das salas com um número máximo possível de pessoas de um mesmo sexo. Assim vamos, por exemplo por na sala A, que neste momento está com 19 rapazes e 19 garotas, mais 62 rapazes, o que faz com que a sala A fique completa com 100 alunos (onde existem apenas 19 casais compostos pelos 19 rapazes e pelas 19 garotas que foram colocadas inicialmente nesta sala). Neste momento ainda restam 155-62=93 rapazes. Podemos então colocar 62 deles na sala B para que esta sala fique completa com 100 alunos e com apenas 19 casais (compostos pelos 19 rapazes e pelas 19 garotas que foram colocadas inicialmente nesta sala). Neste momento ainda restam 93-63=31 rapazes que podemos colocar na sala C juntamente com 31 garotas para que a sala C fique completa com 100 alunos e com 19+31=50 casais (os 19 casais compostos pelos 19 rapazes e pelas 19 garotas que foram colocadas inicialmente nesta sala mas 31 casais compostos pelos 31 rapazes e pelas 31 garotas colocadas agora na sala C). Finalmente neste momento restam 155-31=124 garotas que podem ser distribuídas nas salas D e E pondo 62 garotas em cada uma destas salas, ficando o 19 casais em cada uma destas salas . Assim o número mínimo de casais que pode ser formado é

Sala A $\rightarrow$ 19
Sala B $\rightarrow$ 19
Sala C $\rightarrow$ 50
Sala D $\rightarrow$ 19
Sala E $\rightarrow$ 19

$$19+19+50+19+19=126 \text{ casais.}$$