Solução dos Problemas da 2ª Lista Semanal

Data: 27/02/2012

Nível I (Alunos do 6o. e 7o. anos do Ensino Fundamental)

1.02. Um estudante escreve números inteiros positivos distintos em sete cartões de papel, um número em cada cartão. Ele observou que, cada vez que escolhe cinco desses cartões, pelo menos dois deles são escritos com números pares.
Qual é o menor valor que pode assumir o produto dos sete números escritos pelo estudante?

Solução

Como cada vez que o estudante escolhe cinco desses cartões, pelo menos dois deles são escritos com números pares, segue que, no máximo, 3 desses cartões são escritos com números ímpares. De fato, se existissem 4 ou mais cartões escritos com números ímpares, no instante em que o estudante escolhesse cinco cartões, sendo quatro com números ímpares, não poderia existir a possibilidade de se ter dois com números pares, o que é uma contradição com os dados do problema. Portanto, no máximo três dos cartões são escritos com números ímpares.
Agora, olhando para os números escritos nos cartões, existem 4 possíveis casos:
(i) Existem 3 números ímpares e 4 números pares.
Nesse caso, o menor produto possível dos números dos cartões será: (1 . 3 . 5) . (2. 4 . 6 . 8) = 5760

(ii) Existem 2 números ímpares e 5 números pares.
Nesse caso, o menor produto possível dos números dos cartões será: (1 . 3) . (2. 4 . 6 . 8 . 10) = 11520.

(iii) Existe 1 número ímpar e 6 números pares.
Nesse caso, o menor produto possível dos números dos cartões será: (1) . (2. 4 . 6 . 8 . 10 . 12) = 46080

(iv) Existem 7 números pares.
Nesse caso, o menor produto possível dos números dos cartões será: (2. 4 . 6 . 8 . 10 . 12 . 14) = 645120.

Agora, observe que os quatro números obtidos acima estão em ordem crescente. Portanto, o menor deles é 5760, que é a resposta pedida.

Nível II (Alunos do 8o. e 9o. anos do Ensino Fundamental)

2.02. Numa sala de aula, a média das notas em uma prova de Matemática foi 15,6875. Todas as notas obtidas foram números inteiros não negativos.
Qual é o número mínimo de estudantes com o qual é possível obter esta média?
Dê um exemplo de distribuição das notas de modo que se obtenha a média dada.

<u>Solução</u>

Seja n a quantidade de alunos e S a soma das notas obtidas.

Então $\frac{S}{n} = 15,6875 = \frac{156875}{10000} = \frac{251}{16}$.

Agora, observe que a fração $\frac{251}{16}$ é irredutível e 16.S = 251.*n*. Isto significa dizer que *n* tem de ser múltiplo positivo de 16. O menor deles é 16. Portanto, o número mínimo de estudantes com o qual é possível obter esta média é 16.

Sejam $n_1, n_2, n_3, ..., n_{16}$, respectivamente, as 16 notas obtidas pelos estudantes.

Se $n_1 = n_2 = n_3 = ... = n_{12} = 20,\ n_{13} = 11,\ n_{14} = n_{15} = n_{16} = 0$, temos que $\frac{S}{n} = \frac{251}{16} = 15,6875$.

Nível III (Alunos do Ensino Médio)

3.02. Um professor de Matemática escreve no quadro-negro doze números naturais consecutivos. Um estudante apaga um dos números e calcula a soma dos restantes.
Se o resultado dessa soma é 2012, qual é a soma dos dígitos do número apagado?

<u>Solução</u>

Suponha que os doze números naturais consecutivos sejam: n, n +1, n + 2,, n + 3, ..., n + 11.
Vamos supor que o número apagado pelo estudante seja n + i, onde i é um número inteiro com $0 \leq i \leq 11$.
Agora, a soma de todos os números escritos no quadro pelo professor é:

$$n + (n+1) + (n + 2) + (n + 3) + ... + (n + 11) = 12n + (1 + 2 + 3 + ... + 11) = 12n + 66.$$

Observe então que (12n + 66) – (n + i) = 2012, o que é o mesmo que:

$$(11n + 66) - i = 2012 \quad (*).$$

Por outro lado,
(11n + 66) = 11.(n + 6), o que nos permite escrever:
11.(n + 6) = 2012 + i = (11.182 + 10) + i = 11.182 + (10 + i).
Como o lado esquerdo da igualdade acima é um múltiplo de 11 e a parcela do lado direito, 11. 182. é um múltiplo de 11, temos que 10 + i é um múltiplo de 11. Mas, como $0 \leq i \leq 11$, temos que i = 1. Substituindo o valor de i em (*), obtemos 11n + 66 – 1 = 2012, que nos dá n = 177. Portanto, a reposta é 1 + 7 + 7 = 15.