Solução dos
Problemas Semanais
Data: 12/03/2012

Olimpíada Brasileira de Matemática

Competição Matemática do Rio Grande do Norte

UFRN EXTENSÃO

Nível I (Alunos do 6o. e 7o. anos do Ensino Fundamental)

1.04. Um Professor de Matemática apresenta aos seus alunos 1275 cartões iguais e pede para que numerem um cartão com “1”, dois cartões com “2”, três cartões com “3”, ..., cinquenta cartões com “50”. Em seguida, o Professor coloca esses 1 + 2 + 3 + ... + 50 = 1275 cartões numa caixa. O Professor escolhe um aluno para retirar cartões com a regra: ele pode retirar, aleatoriamente, cartões da caixa, sem reposição.
Qual é o número *mínimo* de cartões que o aluno pode tirar para ter certeza que retirou 10 cartões com o mesmo número?

Solução

Se o aluno retirar cartões numerados com 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9, ele não vai atingir o propósito do problema. Além disso, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45. Retirando esses 45 cartões mais 9 de cada um dos tipos restantes (numerados de 10 até 50, ou seja, 41 cartões), na próxima retirada ele completaria, com certeza, para algum dos cartões, 10 com o mesmo número. Logo, para ter certeza de tirar 10 cartões com o mesmo número, o estudante tem de tirar o mínimo de 45 + 9.41 + 1 = 45 + 369 + 1 = 415.

Nível II (Alunos do 8o. e 9o. anos do Ensino Fundamental)

2.04. Existem três pilhas de caroços de feijão: com 19, 8 e 9 caroços respectivamente. Uma operação permitida é: você pode escolher duas pilhas e transferir um caroço de cada uma delas para a terceira.
Depois de várias dessas operações, é possível que em cada uma das pilhas haja 12 caroços?

Solução

A resposta é **não**.
Sejam a, b e c, respectivamente, a quantidade de caroços de feijão nas três pilhas num dado instante. Agora, olhe para esses números pensado nos seus restos na divisão por 3. No início, os respectivos restos na divisão por 3, são: 1, 2 e 0. Depois de uma operação esses restos se tornam 0, 1 e 2 em alguma ordem, não importando qual pilha teve os caroços transferidos. Logo, os restos na divisão por 3 da quantidade de caroços em cada pilha serão sempre 0, 1 e 2, em alguma ordem. Portanto, é impossível que a pilha tenha igual números de caroços, pois teríamos os três restos na divisão por 3 iguais.

Nível III (Alunos do Ensino Médio)

3.04. Escreve-se 268 números em volta de um círculo. O 17º número é 3, o 83º é 4 e o 144º é 9. A soma de quaisquer 20 números consecutivos é 72.
Encontre o 210º número.

Solução

Sejam $a_1, a_2, a_3, ..., a_{268}$ os números escritos. Como eles estão escritos em volta de um círculo, é natural pensar que o número $a_{269} = a_1, a_{270} = a_2$ e assim por diante. Pela hipótese do problema, temos que a soma de quaisquer 20 números consecutivos é 72. Isto significa que
$a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + ... + a_{i+19} = a_{i+1} + a_{i+2} + ... + a_{i+19} + a_{i+20}$ = 72, o que nos permite concluir que $a_i = a_{i+20}$.
Deste modo, podemos concluir: $a_1 = a_{281} = a_{13} = a_{273} = a_5$. Logo, podemos concluir que $a_i = a_{i+4}$. (*)
O que queremos achar é o valor de a_{210}, que sabemos agora que é igual ao número a_2. Agora, temos que: $a_1 = a_{17} = 3,\ a_3 = a_{83} = 4,\ a_4 = a_{144} = 9$. Por outro lado, $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{20} = 72$. Mas, por (*), temos que $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{20} = 72 = 5a_1 + 5a_2 + 5a_3 + 5a_4 = 80 + 5a_2$. Portanto, $a_2 = -\frac{8}{5}$ e $a_{210} = -\frac{8}{5}$.