SOLUÇÃO DOS

Problemas Semanais

Data: 19/03/2012

Olimpíada Brasileira de Matemática

Nível I (Alunos do 6o. e 7o. anos do Ensino Fundamental)

1.05. Saladino e Sortudo disputam um jogo lançando um dado. Eles jogam alternadamente e Sortudo começa. Cada vez que na face superior do dado aparece o 6, o jogador obtém um ponto. Sortudo tem tanta sorte que a cada 5 jogadas consecutivas ele obtém pelo menos 1 ponto. Por outro lado, a cada 6 jogadas consecutivas que Saladino faz, sempre obtém no máximo 1 ponto. Vence o primeiro que acumula 4 pontos.

(a) Mostre uma partida em que Sortudo vence.

(b) Mostre uma partida em que Saladino vence.

Solução

(a) Pelas hipóteses do problema, Sortudo pode obter 1 ponto em cada uma de suas quatro primeiras jogadas. Por outro lado, é possível que Saladino não obtenha qualquer ponto em suas quatro primeiras jogadas. Desta forma, essa é uma partida em que Sortudo vence na sua quarta jogada:

Número da jogada	Pontos de Sortudo	Pontos de Saladino
1	1	0
2	1	0
3	1	0
4	1	0
Total de pontos	**4**	**0**

(b) No exemplo a seguir, mostramos uma partida, disputada em 19 jogadas, cujo vencedor é Saladino. Nessa partida, em quaisquer 6 jogadas consecutivas Saladino faz exatamente 1 ponto, enquanto a cada 5 jogadas consecutivas Sortudo faz exatamente 1 ponto. Com isso, as hipóteses do problema são satisfeitas e Saladino consegue atingir primeiro os 4 pontos, vencendo a partida.

Número da jogada	Pontos de Saladino	Pontos de Sortudo
1	1	0
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	1
6	0	0
7	1	0
8	0	0
9	0	0
10	0	1
11	0	0
12	0	0
13	1	0
14	0	0
15	0	1
16	0	0
17	0	0
18	0	0
19	1	0
Total de pontos	**4**	**3**

Nível II (Alunos do 8o. e 9o. anos do Ensino Fundamental)

2.05. Um Professor de Matemática desenha um círculo no quadro-negro, marca 20 pontos sobre ele e propõe um jogo para dois estudantes, A e B, no qual eles jogam alternadamente. O jogador A começa. Uma jogada consiste em desenhar um segmento de reta unindo dois dos pontos e que não cruze outro segmento já desenhado. Perde o jogador que, na sua vez, não puder jogar.

Quem vence: o jogador A ou o jogador B? Qual é a estratégia para vencer?

Solução

O jogador A vence. Sua estratégia para vencer consiste em, na sua primeira jogada, traçar um segmento unindo dois pontos de modo que separe o restante dos pontos em dois grupos de 9 pontos. Depois disso, para cada jogada que o B fizer, ele responde traçando um segmento de modo simétrico, unindo dois pontos do outro grupo. É oportuno observar que a estratégia do jogador A não depende de como o Professor distribuiu os pontos no circulo.

Nível III (Alunos do Ensino Médio)

3.05. Cinco jarras vazias e idênticas, com capacidades de 2 litros, estão localizadas sobre os vértices de um pentágono regular. Cinderela e sua madrasta malvada realizam o seguinte procedimento por rodadas. No início de cada rodada, a madrasta pega um litro de água de um rio próximo e distribui seu conteúdo arbitrariamente nas cinco jarras. Em seguida, Cinderela escolhe um par de jarras vizinhas, derrama todo seu conteúdo no rio, e volta para seu lugar. A seguir, começa a rodada seguinte, na qual cada uma das mulheres faz os respectivos procedimentos. O jogo prossegue desta maneira. O objetivo da madrasta malvada é conseguir que uma das jarras encha completamente. O objetivo de Cinderela é evitar que isto aconteça.

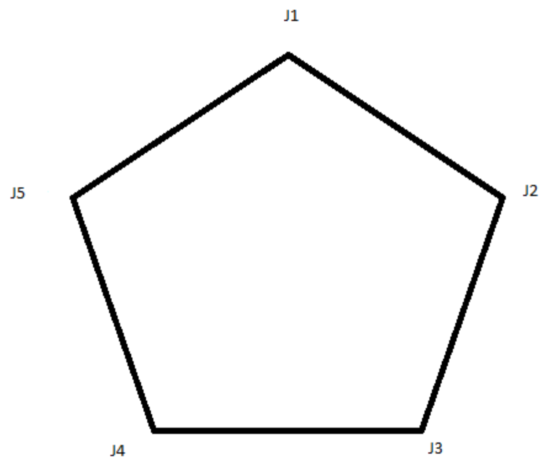
A madrasta pode garantir que uma das jarras enche completamente?

Solução 1

Não. A madrasta não pode garantir que uma das jarras encha completamente.

Vamos mostrar isso usando **indução sobre o número de rodadas**.

Numeramos, no sentido anti-horário, J_1, J_2, J_3, J_4 e J_5 as jarras colocadas sobre os vértices de um pentágono regular, veja Figura a seguir.



Deste modo, a jarra J_5 é adjacente as jarras J_1 e J_4, a jarra J_4 é adjacente as jarras J_5 e J_3, a jarra J_3 é adjacente as jarras J_4 e J_2, a jarra J_2 é adjacente as jarras J_3 e J_1, e a jarra J_1 é adjacente as jarras J_5 e J_2 .

A estratégia da Cinderela é:

(i) manter duas jarras adjacentes sempre vazias (por exemplo, as jarras J_1 e J_2);

(ii) manter as jarras adjacentes contendo no máximo 1 litro de água (no exemplo: J_5 e J_3);

(iii) manter a jarra que sobra com no máximo 1 litro de água (no exemplo: J_4).

No início, os três itens da estratégia da Cinderela são satisfeitos, pois as jarras estão vazias.

Suponha que Cinderela consegue manter as três condições, (i), (ii) e (iii), até a rodada $r - 1$, com $r > 1$. Se i pertence a {1, 2, 3, 4, 5}, chamemos de c_i o conteúdo da jarra J_i antes que a madrasta faça seu procedimento na rodada r e sejam d_i os correspondentes conteúdos depois que a madrasta distribuiu 1 litro de água nas jarras no movimento de número r.

Pela estratégia da Cinderela, podemos assumir que: $c_1 = c_2 = 0$, $c_5 + c_3 \leq 1$ e $c_4 \leq 1$.

Logo após a madrasta distribuir 1 litro de água, temos que:

$d_1 + d_2 + d_3 + d_5 \leq 2$, o que implica que: ou $d_1 + d_3 \leq 1$ ou $d_2 + d_5 \leq 1$. Vamos supor que $d_2 + d_5 \leq 1$.

Neste caso, a Cinderela esvazia as jarras J_5 e J_1.

No início da rodada de número (r + 1), as jarras J_1 e J_5 estão vazias (satisfazendo a condição (i)). Agora, como $d_2 + d_5 \leq 1$, a condição (ii) da estratégia da Cinderela ocorre. Por outro lado, como $c_1 \leq 0$, temos que $d_3 \leq 1$, o que faz com que a condição (iii) seja satisfeita.

Portanto, Cinderela garante que as condições (i), (ii) e (iii) são satisfeitas na rodada de número (r + 1). Pelo Princípio da Indução, a Cinderela garante que, em qualquer rodada, o conteúdo de cada jarra não é maior do que 1 litro. Com as jarras tem capacidade de 2 litros, nenhuma das jarras enche completamente.

Solução 2

Na rodada n, para $n = 0, 1, 2$ ... sejam:
c_n a quantidade total de líquido que cinderela deixa;
b_n a quantidade total de líquido que a madrasta deixa no fim da rodada;
c_n^{exc} a quantidade de líquido excluída por cinderela dos dois vasos;
c_n^{max} a quantidade máxima de líquido que cinderela deixa em único vaso;
b_n^{max} a quantidade máxima de líquido que a madrasta coloca em único vaso;

A seguir provaremos as seguintes relações:

i) $b_n = c_n + 1$;
ii) $c_n^{exc} = b_{n-1} - c_n$;
iii) $c_n^{exc} >= b_{n-1} * 2/5$;
iv) $c_n <= b_{n-1} * 3/5$;
v) $c_n^{max} <= c_n / 2$;
vi) $b_n <= b_{n-1} * 3/5 + 1$;
vii) $b_n <= (5^{n+1} – 3^{n+1}) / 2*5^n < 5/2$;
viii) $c_n <= b_{n-1} * 3/5 < (5/2) * (3/5) = 3/2$;
ix) $c_n^{max} < 3 / 4$;
x) $b_n^{max} < 7 / 4$.

OBS. O símbolo * significa produto.

As relações i) e ii) decorrem diretamente do enunciado.
Prova de iii): Sejam b_{n-1}^1, b_{n-1}^2, b_{n-1}^3, b_{n-1}^4 e b_{n-1}^5 as quantidades dos cinco vasos vizinhos, temos então que

$$c_n^{exc} >= b_{n-1}^1 + b_{n-1}^2;$$
$$c_n^{exc} >= b_{n-1}^2 + b_{n-1}^3;$$
$$c_n^{exc} >= b_{n-1}^3 + b_{n-1}^4;$$
$$c_n^{exc} >= b_{n-1}^4 + b_{n-1}^5;$$
$$c_n^{exc} >= b_{n-1}^5 + b_{n-1}^1.$$

Somando estas cinco desigualdades, obtemos

$$5 * c_n^{exc} >= 2 * b_{n-1} .$$

Prova de iv) decorre de ii) e iii).
Prova de v): Inicialmente é obvio que

$$c_n^{max} <= c_n^{exc};$$
$$2*c_n^{max} <= c_n^{exc} + c_n^{max} <= c_n;$$

Daí, concluímos a prova de v).
Usando i) e iv) concluímos vi).

Prova de vii): Usando vi) sucessivamente e que $b_o = 1$ temos que

$$b_1 <= 3/5 + 1 = (5^2-3^2)/(2*5) ;$$

$$b_2 <= * 3/5 *(5^2-3^2)/(2*5) + 1 = (5^3-3^3)/(2*5^2);$$

Por indução provamos que $b_n <= (5^{n+1} – 3^{n+1}) / 2*5^n$.
Daí, concluímos a prova de vii).
Facilmente concluímos viii), ix) e x).
Observe que a relação x) é uma afirmação mais forte que o pedido no problema.
Portanto, como a madrasta só pode colocar em um jarra no máximo 7/4 litros, ela nunca vai encher completamente uma jarra.