Prezados Diretores de Escola e Professores de Matemática,

Os **Problemas Semanais** são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática.
Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.
Será altamente benéfico identificar os estudantes que resolveram os problemas e incentivá-los a obter soluções mais curtas, usando, sempre que possível, recursos elementares.
Por favor, divulguem os problemas!

Problemas Semanais
Data: 26/03/2012

Olimpíada Brasileira de Matemática

Competição Matemática do Rio Grande do Norte

UFRN EXTENSÃO

Nível I (Alunos do 6o. e 7o. anos do Ensino Fundamental)

1.06. Um estudante escreve num quadro-negro todos os números inteiros positivos de 1 até K:

1, 2, 3, 4, ..., K,

onde K é um número inteiro positivo com três dígitos.
Se exatamente a metade destes números possui na sua representação decimal pelo menos um dígito 1, encontre o maior valor possível para K.

Solução

K = 272.

Inicialmente, observe que K é par, pois temos que ter K/2 como um número inteiro (pelos dados do problema, K/2 é a quantidade de números, 1 até K, que possuem pelo menos um algarismo igual a 1 na sua representação decimal)
Inicialmente, vamos descobrir quantos números de 1 até 99 possuem pelo menos um dígito igual a 1. De 1 até 99 o dígito 1 aparece nos números

1, 10, 11, ...,19, 21,31,41,51,61,71,81 e 91 (19 números)

De 1 até 199 o dígito 1 aparece 19 + 100 = 119 vezes. Logo, $K \geq 2.\ 119 = 238$.
Agora, observe que, de 1 até 238 existem 119 + 13 = 132 números que tem pelo menos um dígito 1. Assim, $K \geq 2.\ 132 = 264$.
Por outro lado, de 1 até 264 existem 132 + 3 = 135 números que tem pelo menos um dígito 1. Assim, temos que $K \geq 2.135 = 270$. Como o número 271 tem um dígito 1, concluímos que de 1 até 272 existem exatamente 136 números que tem pelo menos um dígito 1. Logo, $K \geq 272$.
Vamos mostrar que 272 é o maior valor possível para K.
Inicialmente, observamos que, dentre os números de três dígitos maiores do que 272, existem mais números que não possuem o dígito 1 do que números que tem pelo menos um dígito 1. Para ver isso, vamos fazer uma contagem dos números que tem pelo menos um dígito 1 de modo que fique claro que existem mais números que não possuem o dígito 1 do que números que tem pelo menos um dígito 1. Para isso, vamos escrever 65 conjuntos cujos elementos estão acima de 272 e de modo que em cada um desses conjuntos a quantidade de números que tem o dígito 1 é igual a quantidade de números que não tem o dígito 1. Além

disso, nesses conjuntos estão todos os números com três dígitos e maiores do que 272 que tem pelo menos um dígito 1:

$A_1 = \{280, 281\}$
$A_2 = \{290, 291\}$
$A_3 = \{298, 299, 300, 301, 302, ..., 310, 311, ...319\}$
$A_4 = \{320, 321\}$
$A_5 = \{330, 331\}$
....
$A_{64} = \{980, 981\}$
$A_{65} = \{990, 991\}$

Ora, como existem outros números de três dígitos maiores do que 272, além dos elementos de todos os conjuntos escritos acima, segue que existem mais números que não possuem o dígito 1 do que números que tem pelo menos um dígito 1. Portanto, nenhum outro número maior do que 272 satisfaz ao problema.

Nível II (Alunos do 8o. e 9o. anos do Ensino Fundamental)

2.06. Em um país distante, a unidade do dinheiro local é o Poti. Nesse país, só existem três tipos de moedas, cada uma com um valor inteiro de potis. Um habitante do país tem quatro moedas no seu bolso direito, num total de 28 potis, e tem cinco moedas em seu bolso esquerdo, num total de 21 potis. Mas, em cada bolso há pelo menos uma moeda de cada tipo.
Encontre a soma dos valores dos três tipos de moedas que o habitante possui.
Solução

Sejam a, b e c os valores das moedas, com $1 \leq a < b < c$.
Pelos dados do problema, no bolso direito há uma moeda de cada valor e uma moeda a mais, de valor desconhecido. No bolso esquerdo há uma moeda de cada valor e duas moedas adicionais, de valor desconhecido.
Como no bolso direito há um total de 28 potis, portanto, maior do que o valor do total de moedas do bolso esquerdo, a moeda adicional do bolso direito não pode ser do valor a, pois no bolso direito existem 5 moedas e um total de 21 potis.
Portanto, temos dois casos possíveis para analisar:

- **(i) A moeda adicional do bolso direito é do valor *b***
- **(ii) A moeda adicional do bolso direito é do valor *c*.**

Caso (i)
Neste caso, as moedas adicionais do bolso esquerdo tem ambas o valor a. Assim, para a quantidade de potis nos dois bolsos podemos escrever

$$(a + b + c) + b = 28 \quad \text{e} \quad (a + b + c) + a + a = 21.$$

Diminuindo uma equação da outra, temos $b - 2a = 7$, que é o mesmo que $b = 2a + 7$. Daí, podemos concluir que: $b \geq 9$ e $c \geq 10$. Mas, isso nos leva a concluir que $(a + b + c) + b > 28$. Portanto, o caso (i) não tem solução.
Caso (ii)
Se a moeda adicional no bolso direito tem valor c, as moedas adicionais do bolso esquerdo podem ser uma do valor a, uma de valor b, ambas de valores iguais a b ou ambas de valores a.

Se as moedas adicionais do bolso esquerdo fossem uma de valor a e a outra de valor b, teríamos as equações: $(a + b + c) + c = 28$ e $(a + b + c) + a + b = 21$. Agora, somando membro a membro as duas equações, teríamos: $3(a + b + c) = 49$, que é impossível, pois 49 não é múltiplo de 3.

Se as moedas adicionais do bolso esquerdo são ambas de valor b, teríamos as equações:
$(a + b + c) + c = 28$ e $(a + b + c) + b + b = 21$. Diminuindo membro a membro as equações, teríamos $c – 2b = 7$, que é o mesmo que $c = 2b + 7$. Substituindo este valor em $(a + b + c) + b + b = 21$, teríamos $a + 5b = 14$. Portanto, os possíveis valores para b são 1 ou 2 e $a \geq 4$. O que é uma contradição, pois assumimos $a < b$.

Resta o caso em que ambas as moedas do bolso esquerdo sejam de valor a. Neste caso, podemos escrever as equações $(a + b + c) + c = 28$ e $(a + b + c) + a +a = 21$. Agora, diminuindo membro a membro as duas equações, obtemos $c – 2a = 7$, que é o mesmo que $c = 2a + 7$. Substituindo este valor na equação $(a + b + c) + a +a = 21$, temos $5a + b = 14$. As possíveis soluções desta última equação são: $a = 1$, $b = 9$ e $a = 2$, $b = 4$. Substituindo esses valores em $(a + b + c) + c = 28$, obtemos $c = 9$, o que é impossível, pois teríamos $b = c$. Considerando a segunda possibilidade, obtemos $a = 2$, $b = 4$ e $c = 11$, qie é, portanto, a única solução do problema.

Portanto, $a + b + c = 2 + 4 + 11 = 17$.

Nível III (Alunos do Ensino Médio)

3.06. Num certo país, o governo local deseja emitir moedas cujos valores sejam três quantidades inteiras positivas distintas, de tal maneira que uma pessoa que leve m moedas convenientemente escolhidas, possa pagar exatamente qualquer quantidade inteira de 1 até 99, sem receber volta.

Qual é o menor valor que pode ter m?

Solução

Inicialmente, observe que uma das moedas tem de ser do valor 1, caso contrário uma pessoa não poderia pagar essa quantidade, sem receber volta.

Sejam 1, n e M os três valores inteiros das moedas. Suponha que $1 < n < M < 99$.

Seja x a quantidade de moedas do valor M. Para que uma pessoa possa pagar a quantia 99 com o menor número de moedas M, teremos $99 = xM + r$. Como x é o menor possível, temos que r é o maior possível. Ou seja, $r = M – 1$. Assim, $99 = xM + (M – 1)$, que implica $(x + 1).M = 99 + 1= 100$. Ou seja, o inteiro M é um divisor de 100. Isto significa que $M \in \{50, 25, 20, 10, 5, 4, 2\}$.

Por outro lado, para uma pessoa pagar a quantia M – 1 com o menor número de moedas m, teremos
$M – 1 = yn + t$. Como y é o menor possível, teremos $t = n – 1$. Assim, $M – 1 = yn + n -1$, que é o mesmo que $M = n(y + 1)$. Ou seja, n é um divisor de M, com $1 < n < M$.

Deste modo, as tabelas abaixo mostram as possibilidades para M, n e os respectivos números de moedas.

Tabela 1

Moeda	Valor	Quantidade
M	50	1
n	25	1
1	1	24
Total		26

Tabela 2

Moeda	Valor	Quantidade
M	50	1
n	5	9
1	1	4
Total		14

Tabela 2

Moeda	Valor	Quantidade
M	25	3
n	5	4
1	1	4
Total		11

Tabela 3

Moeda	Valor	Quantidade
M	20	4
n	5	3
1	1	4
Total		11

Tabela 4

Moeda	Valor	Quantidade
M	20	4
n	4	4
1	1	3
Total		11

Tabela 5

Moeda	Valor	Quantidade
M	10	9
n	5	1
1	1	4
Total		14

Tabela 6

Moeda	Valor	Quantidade
M	10	9
n	2	4
1	1	1
Total		14

Tabela 6

Moeda	Valor	Quantidade
M	5	19
n	-	0
1	1	4
Total		23

Tabela 7

Moeda	Valor	Quantidade
M	4	24
n	2	1
1	1	1
Total		26

Tabela 8

Moeda	Valor	Quantidade
M	4	24
n	-	0
1	1	3
Total		27

Portanto, o menor valor que pode ter m é 11.