Solução dos

Problemas Semanais

Data: 16/04/2012

Olimpíada Brasileira de Matemática

Competição Matemática do Rio Grande do Norte

UFRN EXTENSÃO

Nível I (Alunos do 6o. e 7o. anos do Ensino Fundamental)

1.07. Temos 150 cartões iguais, numerados com um inteiro de 1 a 150, cada cartão com um número. Os cartões são distribuídos aleatoriamente em uma fila, um seguido do outro. Dois jogadores, A e B, alternadamente, retiram um cartão dos extremos da fila, à escolha do jogador. O jogador A inicia o jogo. Quando todos os cartões são retirados, somam-se os números dos cartões que cada jogador tem e aquele que obtiver a maior soma vence o jogo.

Para cada distribuição dos cartões numa fila, qual é o jogador, A ou B, que possui uma estratégia vencedora? Descubra a estratégia vencedora e prove que ela é vencedora.

SOLUÇÃO

O jogador A vence.

Sua estratégia é a seguinte: numera as posições, da esquerda para à direita, de 1 até 150. Em seguida, calcula a soma, S_p, dos números dos cartões nas posições pares: 2, 4, ...150, e a soma, S_i, dos cartões nas posições ímpares: 1, 3, 5, ..., 149.

Observe que, a soma $S_i + S_p$ é igual a soma 1 + 2 + 3 + ...+ 150 = 151 x 75, que é um número ímpar. Isto implica que $S_i \neq S_p$.

Se $S_i > S_p$, então, em sua primeira jogada o jogador A retira o cartão na posição 1. Na sua jogada, o jogador B tem duas opções para retirar um cartão, ambas em posições pares, 2 e 150. Retirando um desses cartões, o jogador A retirar o único cartão na posição ímpar que existe em um dos extremos. E assim o jogo prossegue. Ao finalizar a partida, o jogador A tem todos os cartões nas posições ímpares. Como $S_i > S_p$, o jogador A vence.

Se $S_i < S_p$, a estratégia do jogador A é análoga ao caso anterior, só que, neste caso, o jogador A segue retirando cartões nas posições pares, o que obriga o jogador B retirar cartões nas posições ímpares. Portanto, o jogador A vence.

Nível II (Alunos do 8o. e 9o. anos do Ensino Fundamental)

2.07. Dividir o conjunto dos inteiros positivos de 1 até 100 inclusive em dois conjuntos, A e B, tais que A contenha 70 números, B contenha 30 números e a soma dos números de A seja igual a soma de todos os números de B.

Solução

Ora, como 1 + 2 + 3 +...+ 100 = 5050 e a soma dos elementos dos conjuntos A e B deve ser a mesma, segue que a soma dos elementos em cada uma dos conjuntos A e B deve ser 5050/2=2525. Se tentarmos por num dos conjuntos, o A, por exemplo, os 30 maiores números de 1 até 100, ou seja, os números 71,72, 73, ... ,100 e os 70 restantes, a saber 1, 2, 3,.., 70 no conjunto B, teremos a soma dos elementos do conjunto A como sendo

71+72+73+...+100 = 30.(71+100)/2=2.565.

Mas, 2.565 passa 40 unidades da soma que queremos que é de 2.525. Para "corrigir" isso basta que eliminemos o elemento 100
desse conjunto A, o que diminuiria a soma dos elementos em 100 unidades e, portanto, passaria a ser 2.565 - 100 =2.465 e trazermos o elemento 60 (que estava no outro conjunto B) para esse conjunto A. Assim a soma dos elementos de A passaria a ser 2.465 + 60 = 2.525. Assim, a soma dos elementos do conjunto B teria também o mesmo valor, pois a soma de todos os elementos é 5.050.

Resumindo,

A={60, 71,72, 73,...,99} (30 elementos com soma 2.525)
B={1,2,3,...,59, 61, ...70, 100} (70 elementos com soma 2.525)

Nível III (Alunos do Ensino Médio)

3.07. Um professor de Matemática pretende repartir 99 chocolates entre vários de seus alunos. O professor deseja seguir o procedimento seguinte. O primeiro estudante recebe 1, 2 ou 3 chocolates. O segundo recebe um chocolate a mais ou um chocolate a menos do que o primeiro. O terceiro recebe um chocolate a mais ou um chocolate a menos do que o segundo, e assim por diante, cada estudante recebendo um chocolate a mais ou um chocolate a menos do que o imediatamente anterior.
Determinar o menor número de estudantes com os quais o professor pode repartir os chocolates.
Para o número de estudantes encontrado, de quantas maneiras o professor pode repartir os chocolates?
SOLUÇÃO

Temos que encontrar:
(i) O menor número de estudantes com os quais o professor pode repartir os chocolates.
(ii) De quantos modos o professor pode repartir os chocolates.

Para resolver item (i), repartimos os chocolates dando a maior quantidade possível a cada um dos estudantes. Isto vai nos assegurar a menor quantidade de estudantes que receberão os 99 chocolates. Assim, se são n estudantes, $e_1, e_2, e_3, ...e_n$, damos ao primeiro estudante 3 chocolates e um a mais para cada um dos estudantes seguintes. Logo, os estudantes receberão 3, 4, 5, 6, ..., (n + 2) chocolates, respectivamente, onde:

$$3+4+5+....+(n+2)=\frac{n(n+2+3)}{2}=\frac{n(n+5)}{2}\geq 99 .$$

Assim, o menor valor de n é 13.
Mas, como $3+4+5+....+(13+2)=117>99$, podemos arranjar uma partição dos 99 chocolates entre os 13 estudantes de modo a eliminar o excesso: 117 – 99 = 18.
Portanto, podemos dividir os 99 chocolates entre os 13 estudantes da seguinte maneira:

$$3+4+5+6+7+8+9+10+11+10+9+8+9=99$$

(ii) Aqui, o raciocínio é encontrar de quantas maneiras podemos diminuir 18 de 117, mantendo as hipóteses do problema, para obter exatamente 99 chocolates para 13 estudantes.
O professor pode repartir os chocolates entre os estudantes de 8 maneiras distintas.
A seguir, as 8 possibilidades possíveis:

(1) $3+4+5+6+\mathbf{7}+8+9+10+11+10+9+8+9=99$

(2) $3+4+5+6+7+\mathbf{6}+7+8+9+10+11+12+11=99$

(3) $3+4+5+6+7+8+\mathbf{7}+8+9+10+11+10+11=99$

(4) $3+4+5+6+7+8+9+\mathbf{8}+9+10+9+10+11=99$

(5) $3+4+5+6+7+8+9+8+\mathbf{9}+10+9+10+11=99$

(6) $3+4+5+6+7+8+9+10+9+\mathbf{10}+11+10+7=99$

(7) $3+4+5+6+7+8+9+10+11+10+\mathbf{9}+8+9=99$

(8) $3+4+5+6+\mathbf{7}+8+9+10+11+9+8+\mathbf{9}+10=99$