Prezados Diretores de Escola e Professores de Matemática,

Os **Problemas Semanais** são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemática.
Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.
Será altamente benéfico identificar os estudantes que resolveram os problemas e incentivá-los a obter soluções mais curtas, usando, sempre que possível, recursos elementares.

Por favor, divulguem os problemas!

Problemas Semanais
Data: 09/04/2012

Olimpíada Brasileira de Matemática

Competição Matemática do Rio Grande do Norte

UFRN EXTENSÃO

Nível I (Alunos do 6o. e 7o. anos do Ensino Fundamental)

1.08. Sete copos estão sobre uma mesa – todos de cabeça para baixo. É permitido virar quaisquer 4 deles em um movimento.
É possível chegar a uma situação em que todos os copos estejam virados para cima?

Solução

Não. Após qualquer movimento, o número de copos de cabeça para baixo é sempre ímpar. Ora, se todos os copos estivessem virados para cima, o número de copos de cabeça para baixo seria 0, que é par. Contradição.

Nível II (Alunos do 8o. e 9o. anos do Ensino Fundamental)

2.08. Um garoto distribui 2009 pedras em pilhas. A quantidade de pedras nas pilhas pode se repetir. Seja n o número de pilhas e m a quantidade de pedra que contém a pilha com maior quantidade de pedras.
Determine o maior valor possível para $m + n$.

Solução

Observe que, quando o número de pilhas, n, dividir 2009, então a quantidade mínima de pedras possíveis é $\frac{2009}{n} = m$.

Por outro lado, se o número de pilhas, n, não divide 2009, podemos considerar o menor inteiro que é menor do que ou igual a fração $\frac{2009}{n}$. Vamos chamar esse inteiro de $\left[\frac{2009}{n}\right]$. Assim, o menor valor para m será o número inteiro $\left[\frac{2009}{n}\right]+1$.

Logo, temos que $\frac{2009}{n} < \left[\frac{2009}{n}\right]+1$. Agora, vamos usar a desigualdade das médias aritmética e média geométrica. Isto é, se a,b são números reais não negativos, então $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Desse modo, $n+m \geq n+\dfrac{2009}{n} \geq 2\sqrt{n.\dfrac{2009}{n}} = 2\sqrt{2009} \simeq 2\times 44{,}82 \simeq 89{,}64 > 89$.

Portanto, o maior valor possível para $m + n$ será 90.

Observe que, se $n = 41$ e $m = 49$ realizam esse mínimo.

Nível III (Alunos do Ensino Médio)

3.08. Em duas pilhas existem 72 e 30 doces, respectivamente. Dois estudantes, A e B, disputam um jogo, em que jogam alternadamente. O jogador A começa. Uma jogada consiste em retirar doces de uma das pilhas, de modo o número de doces retirados seja um múltiplo do número de doces da outra pilha.

Vence o jogador que retirar o último doce de uma das pilhas.

Quem vence: A ou B?

Solução

Um dos dois tem de ter uma estratégia vencedora. Vamos provar que o jogador A tem uma estratégia vencedora. A ideia da prova é supor que o jogador B é quem tem uma estratégia vencedora e chegar, com isso, a uma contradição.

Se B tem uma estratégia vencedora, ele retiraria o último doce. Assim, essa estratégia do jogador B funcionaria se o jogador A retirasse, na sua jogada inicial, 2 . 30 = 60 doces (obviamente da pilha com 72, restando 12 doces numa pilha e 30 doces na outra).

Mas agora, se o jogador A retirar 1.30 doces, o jogador B, na sua próxima jogada, não tem escolha senão tomar os outros 30 doces que restaram na mesma pilha e, portanto, o jogador A poderá usar a mesma estratégia dele para garantir que vai retirar o último doce, vencendo o jogo próprio. Esta contradição garante que A tem uma estratégia vencedora.