Solução
Problemas Semanais
Data: 23/04/2012

Olimpíada Brasileira de Matemática

Nível I (Alunos do 6o. e 7o. anos do Ensino Fundamental)

1.09. Bob tem 10 bolsos e 44 moedas de 1 real. Ele quer distribuir suas moedas nos seus bolsos de modo que cada bolso contenha um número diferente de moedas.
Explique se Bob vai conseguir fazer a distribuição.
Solução

O menor número de moedas num bolso é zero. Depois de zero, o menor número de moedas num bolso é 1. Depois de 1, o menor número de moedas num bolso é 2. Prosseguindo deste modo, o número de moedas no décimo bolso é no mínimo 9. Logo, o número mínimo de moedas para serem colocadas nos bolsos de Bob é $0 + 1 + 2 + ... + 9 = 45 > 44$.
Portanto, Bob não vai conseguir distribuir as moedas nos seus bolsos de modo que cada bolso contenha um número diferente de moedas, pois ele só tem 44 moedas.

Nível II (Alunos do 8o. e 9o. anos do Ensino Fundamental)

2.09. Vários piratas repartiram o produto de roubo, 1000 moedas de ouro, todas iguais. Na divisão, um dos piratas ficou com mais da metade das moedas. Durante a primeira noite, para acalmar os ânimos, o pirata que ficou com mais da metade das moedas deu a cada um dos outros piratas tantas moedas quanto ele já tinha. No entanto, novamente havia um pirata com mais da metade das moedas. Na segunda noite, se repetiu o procedimento: o pirata que tinha mais da metade das moedas deu a cada um dos outros tantas moedas quanto ele já tinha. E assim, noite após noite, até que depois da décima noite nenhum pirata tinha mais da metade do total de moedas.
Determinar o número máximo de piratas que pode haver na divisão do espólio.
Solução

Comecemos observando que, se um pirata recebe k moedas na partilha inicial, então na 1ª ,2ª , 3ª , 4ª , 5ª , 6ª, 7ª, 8ª e 9ª noites ele terá respectivamente, 2k, 4k, 8k, 16k, 32k,64k, 128k, 256k e 512k moedas. Logo, para que um pirata chegue na 9ª noite com mais da metade das moedas, então o número mínimo de moedas que ele deve receber na partilha inicial é 1.
Como temos 9 noites, nas quais pelo menos um pirata tem que ter mais da metade das moedas, então se a cada noite tivermos um pirata diferente, concluímos que o número máximo de piratas é menor do que ou igual a nove.
Suponha que o número de piratas seja 9. Pela tabela abaixo, chamando os piratas de P_1, P_2, ..., P_9 e N o número de moedas do respectivo pirata, concluiremos que a distribuição não passa da primeira noite:

P / N	Dia 1
P1 - 1	2
P2 - 2	4
P3 - 4	8
P4 - 8	16
P5 - 16	32
P6 - 32	64
P7 - 64	128
P8 -128	256
P9 - 745	490

Supondo que o número de piratas seja 8, pelos dados da tabela abaixo, concluímos que a distribuição não passa da segunda noite:

N / P	Dia 1	Dia 2
P1 - 1	2	4
P2 - 2	4	8
P3 - 4	8	16
P4 - 8	16	32
P5 - 16	32	64
P6 - 32	64	128
P7 - 64	128	256
P8 - 873	746	492

Se o número de piratas fosse 7, pelos dados da tabela abaixo, concluiremos que a distribuição não passa da terceira noite:

N/P	N1	N2	N3
P1 - 1	2	4	8
P2 - 2	4	8	16
P3 - 4	8	16	32
P4 - 8	16	32	64
P5 - 16	32	64	128
P6 - 32	64	128	256
P7 - 937	874	748	496

Se o número de piratas fosse 6, pelos dados da tabela abaixo, a distribuição se processa no tempo que se quer:

Dia 0	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4	Dia 5	Dia 6	Dia 7	Dia 8	Dia 9	Dia 10
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	24
2	4	8	16	32	64	128	256	512	24	48
4	8	16	32	64	128	256	512	24	48	96
8	16	32	64	128	256	512	24	48	96	192
16	32	64	128	256	512	24	48	96	192	384
969	938	876	752	504	8	16	32	64	128	256

Portanto, o número mínimo de piratas é 6.

Nível III (Alunos do Ensino Médio)

3.09. Um mágico pede a um espectador que escolha 60 números inteiros de 1 até 120 inclusive, tais que:
(a) a soma deles seja igual a soma dos restantes (aqueles não escolhidos);
(b) entre os números escolhidos não haja dois cuja soma seja 121;
(c) entre os escolhidos não haja dois cuja diferença seja 60.

Em seguida, o mágico pede ao espectador que calcule a soma dos 30 maiores números escolhidos. Sem ver nenhum dos números que o espectador selecionou, o mágico "adivinha" exatamente o valor da soma dos 30 maiores, encontrada pelo espectador.
Mostrar porque o mágico sempre consegue achar corretamente o resultado e calcule o valor da soma encontrada pelo espectador.
Solução

Inicialmente, observe que: d*os 60 números escolhidos, existem exatamente 30 deles maiores do que 60 e exatamente 30 deles menores do que ou iguais 60 e, vice-versa (i.e. 30 maiores ou iguais a 60 e 30 menores do que 60).*

De fato, sejam b_1 ,b_2 , b_3 ,..., b_m os números maiores do que 60 e $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ os números menores ou iguais a 60. Pela hipótese (c) , os números $b_1 - 60$, $b_2 - 60$, $b_3 - 60$,...,$b_m - 60$ são os números não escolhidos, menores ou iguais a 60, enquanto que os números $60 + a_1$, $60 + a_2$, $60 + a_3, \ldots, 60 + a_n$ são os não escolhidos maiores do que 60. Pela hipótese (a), devemos ter,

$$\sum (b_i - 60) + \sum (a_J + 60) = \sum b_i + \sum a_j \,.$$

Logo, $\sum b_i + \sum a_j + (n-m)60 = \sum b_i + \sum a_j$, isso só é possível se $m = n$.

Como $m + n = 60$, então $m = n = 30$.

Fazendo uso das hipóteses (b) e (a) , obteremos:

$121 - b_1 \leq 60$, $121 - b_2 \leq 60$, $121 - b_3 \leq 60$, ..., $121 - b_{30} \leq 60$

sendo os 30 números não escolhidos menores ou iguais a 60. Desse modo,
$121 - b_{30} = b_1 - 60$, $121 - b_{29} = b_2 - 60$, $121 - b_{28} = b_3 - 60$, ... , $121 - b_1 = b_{30} - 60$, ou seja, $b_1 + b_{30} = 181$, $b_2 + b_{29} = 181$, $b_3 + b_{28} = 181$, ... , $b_{15} + b_{16} = 181$. Donde se conclui que, $\sum b_i = 181x15 = 2715$, é a soma dos 30 maiores escolhidos.