Solução dos
Problemas Semanais
Data: 30/04/2012

Olimpíada Brasileira de Matemática

Competição Matemática do Rio Grande do Norte

UFRN EXTENSÃO

Nível I (Alunos do 6o. e 7o. anos do Ensino Fundamental)

1.10. Os números 1, 2, 3, 4, ..., 2011, 2012, 2013 são escritos em um quadro negro. Decidimos apagar dois desses números e substituí-los por sua diferença positiva. Depois de fazer isso diversas vezes, só restou um número escrito no quadro.
Este número pode ser 0?
Solução

Dentre os números 1, 2, 3, 4, ..., 2011, 2012, 2013 existe um número ímpar de inteiros ímpar. Como a diferença de dois ímpares é um par, a diferença de dois pares é um par e a diferença entre um par e um ímpar é um ímpar, o número resultante final será ímpar. Logo, é impossível que ele seja 0.

Nível II (Alunos do 8o. e 9o. anos do Ensino Fundamental)

2.10. Os números 1, 2, 3, 4, ... , 999, 1000 são escritos em um quadro negro. Dois jogadores, A e B, disputam o jogo seguinte. Uma jogada consiste em apagar um dos números do quadro. O jogo termina quando restam somente dois números. O jogador A começa. O jogador A vence se a soma dos dois números finais é divisível por 3, o jogador B vence caso contrário.
Quem vence: A ou B? Qual é a estratégia vencedora?
Solução

O jogador B vence. Ele mentalmente separa os números de 1 a 1000 em 500 pares cuja soma seja 1001, que não é divisível por 3: (1, 1009), (2, 1999), (3, 1998), ..., (500, 501). Cada vez que o jogador A apagar um número, o jogador B, na sua vez de jogar, apaga o correspondente número do par cuja soma é 1001.
No final, restarão dois números cuja soma é 1001, que deixa resto 2 quando dividido por 3.

Nível III (Alunos do Ensino Médio)

3.10. Encontre a soma $S = 7 + 77 + 777 + 7777 + 77777 + ... + \underbrace{777....77}_{n \ \ dígitos}$.

Solução:

É fácil ver que:

$S = 7(1 + 11 + 111 + ... + 111...11) = \frac{7}{9}\left(9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{999....99}_{n \ dígitos}\right)$. Agora, observe que:

$9 = 10 - 1;\ \ 99 = 10^2 - 1;\ \ 999 = 10^3 - 1; ....;\ \ \underbrace{999...99}_{n \ dígitos} = 10^{n+1} - 1$. Assim, temos:

$$9+99+999+...+999...99=10+10^2+10^3+....+10^{n+1}-n=\frac{10^{n+1}-10}{9}.$$

Logo, $S=7+77+777+7777+77777+.....+\underbrace{777....77}_{n\quad dígitos}$

é igual a $S=\frac{7}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}\right)=\frac{7}{9^2}\left(10^{n+1}-10\right).$