Solução dos
Problemas Semanais
Data: 07/05/2012

Nível I (Alunos do 6o. e 7o. anos do Ensino Fundamental)

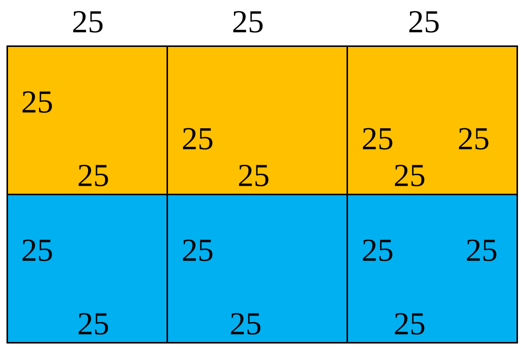
1.11. Diga, justificando, se existem números inteiros positivos *a* e *b* para os quais $2a^2+1=4b^2$.
Solução

Não. O lado esquerdo da igualdade é um número ímpar (pois é a soma de um número par $(2a^2)$ com um número ímpar, 1), enquanto o lado direito é um número par.

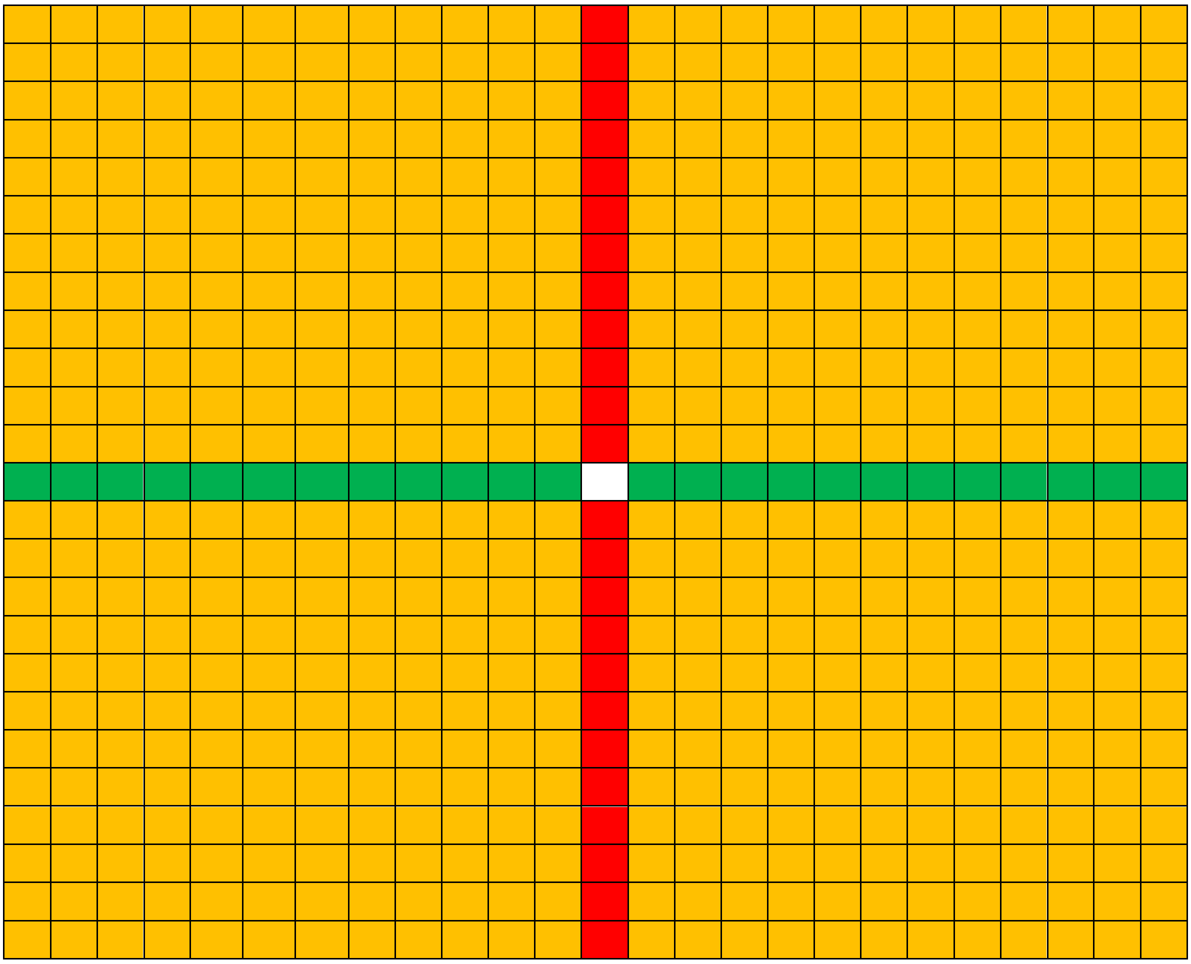
Nível II (Alunos do 8o. e 9o. anos do Ensino Fundamental)

2.11. Um pai dá ao seu filho uma barra retangular de chocolate de tamanho 50 por 75, dividida em quadrados 1 por 1. O garoto pode quebrar a barra em dois pedaços ao longo de uma linha reta que não corte qualquer dos quadrados 1 por 1.
Qual é o número *mínimo* de vezes que o garoto pode quebrar a barra para obter todos os quadrados 1 por 1?
Solução

Dezoito.
Inicialmente, o garoto imagina a barra de chocolate retangular de tamanho cinquenta por setenta e cinco em 6 quadrados 25 por 25, conforme figura a seguir.

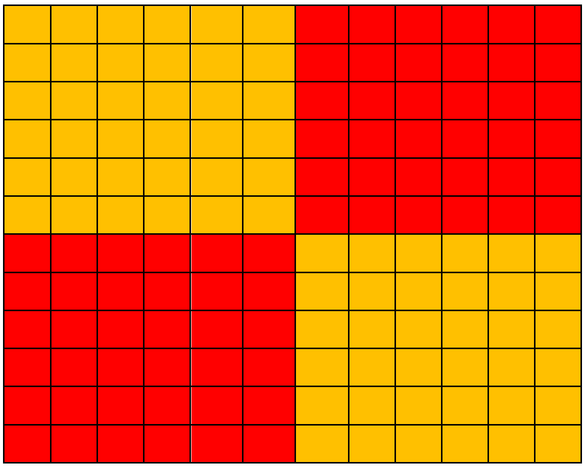


Com isso, ele faz **1** quebra horizontal, dividindo a barra de cinquenta por setenta e cinco em duas barras retangulares de tamanho vinte e cinco por setenta e cinco e, em seguida, sobrepondo as duas barras obtidas, faz **2** quebras verticais, dividindo o que restou da barra em seis barras de chocolate de tamanho vinte e cinco por vinte e cinco.
Agora, ele sobrepõe as seis barras de tamanho 25 por 25.
Nesse ponto, para minimizar o número de vezes que ele vai quebrar as barras, imagina cada um dos seis pedaços de tamanho vinte e cinco por vinte e cinco, que estão sobrepostos, dispostos conforme a figura a seguir.

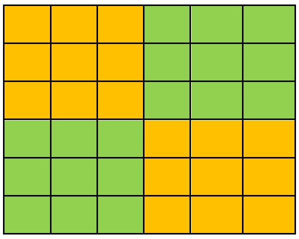


Em seguida, quebra a pilha de seis camadas, para separar as filas centrais inteiras da pilha, horizontalmente **2** vezes e verticalmente **2** vezes, formando vinte e quatro barras de tamanho doze por doze, vinte e quatro barras de tamanho doze por um e mais seis barras de tamanho um por um (as barras centrais).
Nesse momento, o garoto faz dois procedimentos:

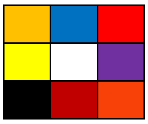
(i) Sobrepõe as vinte e quatro barras de tamanho doze por doze, formando uma pilha, e faz **2** quebras, uma horizontal e uma vertical, de maneira que ele consegue 96 barras seis por seis.



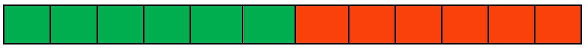
A seguir, empilhando as noventa e seis barras seis por seis, faz **2** quebras, uma horizontal e uma vertical, para obter trezentos e oitenta e quatro barras de chocolate três por três.



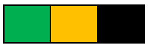
Tomando numa pilha as trezentos e oitenta e quatro barras de chocolate três por três, o garoto faz **4** quebras, dois horizontais e dois verticais, obtendo nove quadrados um por um em cada camada da pilha. Ou seja, o garoto obtém 3456 barras de tamanho um por um.



(ii) Empilha as vinte e quatro barras doze por um e faz **1** quebra vertical, obtendo



quarenta e oito barras de tamanho seis por um. Em seguida, empilhando as quarenta e oito barras de chocolates de tamanho seis por um, faz **1** quebra para obter noventa e seis barras de tamanho três por um.



Em seguida, faz **2** quebras, obtendo, finalmente, 288 barras de tamanho um por um.
Portanto, com esse procedimento, o garoto obtém 3456 + 288 + 6 = 3750 barras de tamanho um por um com 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 4 + 1 + 2 = 18 quebras.

Nível III (Alunos do Ensino Médio)

3.11. Seja n um inteiro positivo e $f(n)$ a quantidade de dígitos do número n (na base 10).

Prove que $f(2^n)+f(5^n)=n+1$.

Solução

Lembrando que para dada inteiro positivo k o número 10^k possui k+1 algarismos. Assim se 2^n possuir (na base 10) k algarismos, segue que

$$10^{k-1} < 2^n < 10^k$$

(Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, atente para o fato de que apesar de 2^n possuir k algarismos não podemos ter $2^n = 10^{k-1}$, pois em 10^{k-1} temos fator 5 e em 2^n não tem!. Neste ponto, lembre-se que n é inteiro positivo)

Analogamente, se 5^n possuir (na base 10) s algarismos, segue que $10^{s-1} \leq 5^n < 10^s$. (Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, atente para o fato de que apesar de 5^n possuir s algarismos, não podemos ter $5^n = 10^{s-1}$, pois em 10^{s-1} temo fator 2 e em 5^n não tem! Neste ponto, lembre-se que n é inteiro positivo)

Assim,

$$\begin{cases} 10^{k-1} < 2^n < 10^k \\ 10^{s-1} < 5^n < 10^s \end{cases},$$

Como todos os números envolvidos nas expressões acima são inteiros positivos, podemos multiplicar membro a membro as duas desigualdades acima, obtendo

$$10^{k-1}.10^{s-1} < 2^n.5^n < 10^k.10^s \Rightarrow 10^{k+s-2} < 10^n < 10^{k+s}$$

Finalmente, perceba que a única potência inteira de 10 que fica entre 10^{k+s-2} e 10^{k+s} é 10^{k+s-1}. Como $10^{k+s-2} < 10^n < 10^{k+s}$ segue que:

$$n = k + s - 1 \Rightarrow k + s = n + 1 \Rightarrow f\left(2^n\right) + f\left(5^n\right) = n + 1$$