Solução dos
Problemas Semanais
Data: 21/05/2012

Nível I (Alunos do 6o. e 7o. anos do Ensino Fundamental)

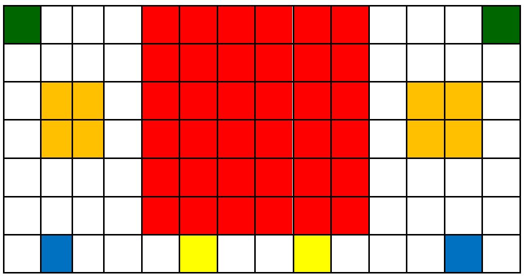
1.13. Um professor de Matemática leva para a sala de aula uma folha de papel na qual está desenhado um tabuleiro de dimensões 7 x 14 e propõe o jogo seguinte para dois estudantes, A e B, no qual eles que jogam alternadamente. Uma jogada consiste em o estudante escolher um quadrado de lados paralelos aos bordos do papel e pintá-lo. Um quadrado que já está pintado não pode ser escolhido. O estudante que pintar o último quadrado vence.

Quem tem uma estratégia vencedora: A ou B? Qual a estratégia vencedora?

Solução

O estudante A, que começa o jogo.

Inicialmente, o estudante A pinta o quadrado 6 x 6, adjacente ao maior lado do retângulo e equidistante à direita e à esquerda dos lados do retângulo dado, veja figura a seguir.



O resto do retângulo 7 x 14, o estudante A imagina dividido em duas partes congruentes. Para toda pintura que o estudante B fizer, o estudante A pinta o correspondente simétrico, veja na figura alguns exemplos. Deste modo, o jogador A pintará o último quadrado, vencendo o jogo.

Nível II (Alunos do 8o. e 9o. anos do Ensino Fundamental)

2.13. Alex e Bruno disputam um jogo para escrever um número natural com 6 dígitos distintos. Uma jogada consiste em escrever um dígito à direita do último dígito que o outro escreveu. (Está proibido escrever um dígito que já foi usado).

Alex começa escrevendo o primeiro dígito à esquerda e Bruno termina escrevendo o último dígito à direita.

Bruno ganha se o número de 6 dígitos é primo. Em caso contrário, ganha Alex.

Determinar qual dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora e explicar como ele deve fazer para ganhar sem importar quão bem jogue o outro.

Solução

Alex vence.
Divida os 10 dígitos em dois subconjuntos: X = {1, 3, 7, 9} e Y = {0, 2, 4, 5, 6, 8}.
Se no número de seis dígitos que aparecerá no final, $a_1b_1a_2b_2a_3b_3$, o dígito b_3 no final do número é um elemento de Y, então Alex vence, pois o número é par ou divisível por 5.
Os dígitos a_1, a_2 e a_3 são dígitos escolhidos por Alex e b_1, b_2 e b_3 são dígitos escolhidos por Bruno.
A estratégia de Alex é obter a soma dos 6 dígitos sendo um múltiplo de 3 ou que o número formado termine com um elemento do conjunto Y.
Vamos examinar as várias possibilidades e mostrar que, com essa estratégia, em todas elas Alex vence.

Em sua primeira jogada, Alex escolhe $a_1 = 3$.

Se o primeiro dígito que Bruno escolhe é $b_1 = 9$, então Alex na sua próxima jogada escolhe $a_2 = 7$. Se na sua próxima jogada Bruno escolhe $b_2 = 1$, não importa que dígito escolhe Alex, Bruno terá que escolher no final um número de Y, pois não terá mais opções disponíveis para ele.
Se Bruno escolhe $b_2 \neq 1$, Alex escolhe $a_3 = 1$ e, novamente, Bruno é obrigado a escolher no final um dígito de Y, com o qual Alex vence.
Se Bruno escolhe $b_1 \neq 9$, então Alex escolhe $a_2 = 9$. Teremos então $a_1 = 3$, $a_2 = 9$. Como o objetivo de Alex é que $a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3$ seja um múltiplo de 3 e tendo já $a_1 = 3$ e $a_2 = 9$ múltiplos de 3, a condição se reduz a que $a_3 + b_1 + b_2 + b_3$ seja múltiplo de 3.
Se $b_1 + b_2$ é um múltiplo de 3, então Alex escolhe a_3 = 2, 5 ou 8. Note que pelo menos um deles está disponível, pois Alex não usou nenhum deles e Bruno só fez duas jogadas. Se Bruno escolhe b_3 em Y, então Alex vence.
Se b_3 = 1 ou 7, nos dois casos b_3 deixa resto 1 na divisão por 3. Neste caso $a_3 + b_1 + b_2 + b_3$ deixa resto 0 na divisão por 3. Portanto Alex vence.
Se b_1 *e* b_2 $b_1 + b_2$ deixa resto 1 na divisão por 3, então Alex escolhe a_3 = 1, 4 ou 7. Note que pelo menos um deles está disponível, pois Alex não usou nenhum deles e Bruno só fez duas jogadas. Se Bruno escolhe b_3 em Y, então Alex vence.
Nos outros dois casos, b_3 = 1 ou 7.
Se $b_3 = 1$, então $a_3 + b_1 + b_2 + b_3$ deixa resto zero na divisão por 3, e, novamente, Alex vence.
Se $b_1 + b_2$ deixa resto 2 na divisão por 3, então Alex escolhe a_3 = 0 ou 6. Note que pelo menos um deles está disponível e, como Bruno joga corretamente, não poderia ter escolhido ambos, pois 0 + 6 é divisível por 3.
Se Bruno escolhe b_3 em Y (estará obrigado a fazê-lo, se b_1 *e* b_2 são 1 ou 7 em alguma ordem. Neste caso, Alex vence.
As outras possibilidades são b_3 = 1 ou 7. Nos dois casos, b_3 deixa resto 1 na divisão por 3 e, novamente, Alex vence.
Portanto, em todas as possibilidades de jogadas de Bruno, Alex vence.

Nível III (Alunos do Ensino Médio)

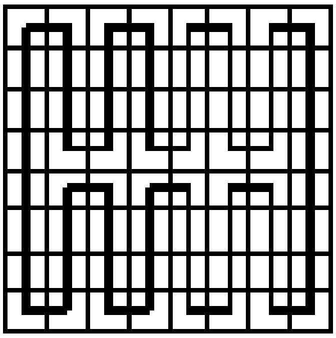
3.13. Escreve-se em cada quadrado de um tabuleiro de xadrez (8 x 8) um número inteiro qualquer. Um rei (peça do jogo de xadrez que se movimenta de casa em casa e em todas as direções) começa se movimentar no tabuleiro. Quando o rei se movimenta, somamos 1 ao número em cada quadrado unitário que ele "visita". Usando este procedimento, é possível fazer com que os números escritos no tabuleiro sejam:

(a) Pares?
(b) Múltiplo de 3?
(c) Iguais?

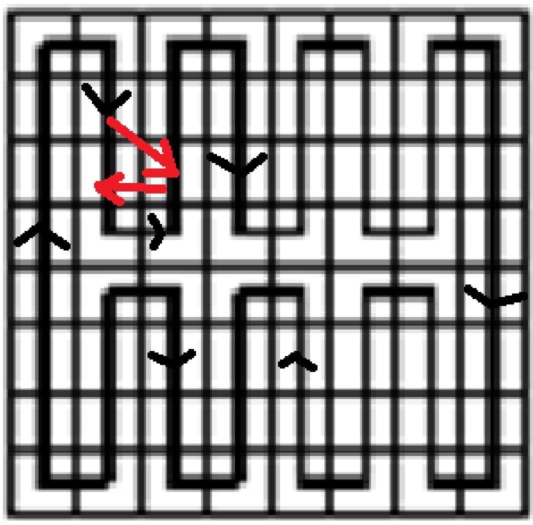
Solução

Sim, para os três itens. Na verdade, basta provar o item (c).

A Figura a seguir exibe um possível caminho para o rei percorrer todos os quadrados unitários do tabuleiro, passando uma só vez por cada quadrado, e retornando ao quadrado inicial. Desse modo, podemos aumentar o número em qualquer quadrado por 1 se necessário.



Além disso, observe que, para qualquer quadrado, é possível modificar o caminho de modo que o rei passe exatamente duas vezes nesse quadrado e exatamente uma vez em cada um dos outros, veja na figura a seguir uma maneira de passar pelo mesmo quadrado duas vezes e pelos restantes uma só vez.



Repetindo esse procedimento um número conveniente de vezes, tornamos todos os números no tabuleiro iguais.