Solução dos
Problemas Semanais
Data: 28/05/2012

Olimpíada Brasileira de Matemática

Competição Matemática do Rio Grande do Norte

UFRN EXTENSÃO

Nível I (Alunos do 6o. e 7o. anos do Ensino Fundamental)

1.14. "Joãozinho tem mais de 1000 livros" "Não, ele tem menos do que 1000 livros". "Ele tem que ter no mínimo um livro".
Se sabemos que somente uma das três afirmações acima é verdadeira, quantos livros Joãozinho tem?
Solução

Ou Joãozinho tem 1000 livros ou o número de livros de Joãozinho é zero.
Joãozinho não pode ter mais do que 1000 livros, pois, assim, a primeira e a terceira afirmações seriam verdadeiras, que pela hipótese do problema não pode acontecer. Ele não pode ter um número de livros que seja entre 1 e 999, pois, neste caso, a segunda e a terceira afirmações seriam ambas verdadeiras, o que não pode acontecer, pois somente uma das três afirmações é verdadeira. Restam duas possibilidades: ou Joãozinho tem exatamente 1000 livros ou Joãozinho tem zero livros. Se Joãozinho tem exatamente 1000 livros, tanto a primeira como a segunda afirmações são falsas e somente a última a firmação é verdadeira Logo, essa é uma possibilidade possível. Se Joãozinho não tem qualquer livro, então a primeira e a última afirmações são falsas e somente a segunda é verdadeira. Portanto, essa é uma possibilidade possível.

Nível II (Alunos do 8o. e 9o. anos do Ensino Fundamental)

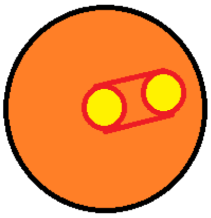
2.14. Um professor leva para a sala de aula uma folha de papel com um disco desenhado e pede para um aluno marcar um ponto na região. O professor propõe o seguinte problema:
Corte o disco em três partes de modo que, ao rearranjá-las, se possa formar novamente o disco tendo como centro o ponto que o aluno marcou no disco.
(a) É possível resolver o problema?
(b) Se em vez de três partes, o professor tivesse proposto cortar o círculo em duas partes?
Solução

(a) É possível resolver o problema proposto pelo professor. Uma solução seria um aluno marcar um ponto P qualquer na região determinada pelo disco e, com centro neste ponto, desenhar um disco menor que esteja totalmente contido na região. Agora, ele desenha um círculo de mesmo raio tendo como centro o centro do disco original.

Em seguida, recorta os discos determinados pelos dois círculos, ficando com três partes do disco original e junta ao disco mutilado os discos recortados em posições invertidas: o de centro P ele coloca no lugar do círculo recortado com centro do disco original e o outro no lugar do disco de centro P. Isso resolve o problema.

(b) É possível.

Uma solução seria adaptar a solução do item anterior para essa nova situação. Depois de desenhar os dois círculos, conforme especificado no caso anterior, ele desenharia duas tangentes aos dois círculos, veja na figura a seguir.



Com isso o aluno formaria uma figura de forma oval nas extremidades. Agora, ele recorta a figura, ficando com duas partes do disco original. Em seguida, junta a figura oval ao disco mutilado, antes fazendo uma rotação de 180^0 em torno da reta que une os centros dos dois discos menores. Isso resolve o problema.

Nível III (Alunos do Ensino Médio)

3.14. Diga, justificando, se é possível escrever no quadro negro mais do que 50 números inteiros positivos com dois dígitos (na base 10) sem que tenhamos dois desses números somando 100.

Solução

Não, é impossível.

Os possíveis 50 números inteiros positivos com dois dígitos (na base 10) satisfazendo ao problema pertenceriam ao subconjunto dos inteiros positivos S = {10, 11, ..., 99}, que tem 90 elementos. Agora, observe que existem exatamente 40 pares de números formados com os elementos de S cuja soma de cada par seja 100: (10, 90), (11, 89), (12, 88), ..., (49, 51). Observe que, nessa análise, deixamos de fora somente os seguintes 10 números de S: 50, 91, 92, 93, 94 95, 96, 97, 98, 99. Se usássemos todos esses 10 números, e acrescentássemos um número de cada par acima, teríamos somente 50 números satisfazendo as condições do problema, porque para o próximo escolhido (para ultrapassar o número de 50) iria ter outro cuja soma seria 100. Portanto, é impossível encontrar mais do que 50 números inteiros positivos com dois dígitos (na base 10) sem que tenhamos dois desses números somando 100.