Solução dos
Problemas Semanais
Data: 04/06/2012

Olimpíada Brasileira de Matemática

Competição Matemática do Rio Grande do Norte

UFRN EXTENSÃO

Nível I (Alunos do 6o. e 7o. anos do Ensino Fundamental)

1.15. Os números 1, 2, 3, ..., 24, 25 são colocados nos quadrados unitários de um tabuleiro 5 por 5, um só número por quadrado unitário. Em cada linha do tabuleiro, eles aparecem em ordem crescente, da esquerda para a direita.
Encontre a maior e a menor soma possível dos números na terceira coluna do tabuleiro.
Solução

Cada quadrado unitário do tabuleiro (que tem os respectivos lados paralelos ao bordo) pertence a uma linha e a uma coluna. Vamos chamar o número que está colocado no quadrado unitário que está na linha 2 e coluna 3 por $a(2,3)$. De um modo geral, $a(i, j)$ é o número que está colocado no quadrado unitário localizado na linha i e coluna j. Como em cada linha do tabuleiro os números aparecem em ordem crescente, da esquerda para a direita, temos que $a(i, j) < a(i, k)$, se $j < k$. Ou seja, se $i < k$, temos $a(i, 3) < a(k, 3)$. O maior valor possível para $a(5, 3)$ é 23, pois $a(4, 3) < a(4, 4) < a(4, 5)$. Desse modo, o maior valor possível para $a(4, 3)$ é 20, pois $a(4, 3) < a(4, 4) < a(4, 5)$ e $a(4, 3) < a(5, 3)$. De maneira análoga, podemos concluir que $a(3, 3) = 17$, $a(2, 3) = 14$ e $a(1, 3) = 11$. Portanto, a maior soma possível dos números da terceira coluna é $23 + 20 + 17 + 14 + 11 = 85$.
De modo inteiramente análogo, obtemos que a menor soma possível dos números da terceira coluna é: $3 + 6 + 9 + 12 + 15 = 45$. Descrevemos a seguir a colocação dos números no tabuleiro de forma a atingir os números máximos e mínimos encontrados:

1	6	11	12	13
2	7	14	15	16
3	8	17	18	19
4	9	20	21	22
5	10	23	24	25

1	2	3	16	21
4	5	6	17	22
7	8	23	18	23
10	11	12	19	24
13	14	15	20	25

Nível II (Alunos do 8o. e 9o. anos do Ensino Fundamental)

2.15. Lucy e Anna disputam um jogo, em que jogam alternadamente, para formar um número natural de dez dígitos distintos. Lucy começa, fazendo o primeiro movimento do jogo, escolhendo um dígito diferente de zero no primeiro lugar (à esquerda do número que será formado). No seu primeiro movimento, Anna escreve, à direita do dígito escrito por Lucy, um dígito distinto do que Lucy escreveu. Elas prosseguem assim, sempre escrevendo um dígito distinto do último escrito. **O número formado pelos primeiros *n* dígitos tem de ser divisível por *n***. Se o jogador não pode fazer um movimento ele perde. Se o jogo tem os 10 movimentos, o jogo é considerado empatado.
(i) Mostre que o jogo pode terminar empatado.
(ii) Mostre que Lucy tem uma estratégia vencedora.
Solução

(i) O número 3.816.547.290 tem a propriedade de que o número formado com os primeiros *n* dígitos é divisível por *n*, para *n* = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Logo, se os movimentos forem de tal maneira que forma o número acima, o jogo será empatado.

(ii) Observe inicialmente que, como Lucy começa o jogo, então Anna tem de escrever um dígito par em cada um de seus movimentos. Assim, a meta de Lucy é usar tantos dígitos pares quanto possível. Lucy começa escrevendo o dígito 6. Existem três casos a considerar para Anna fazer o segundo movimento do jogo:

Caso 1 – Se Anna escreve um 4 ou um 2, então Lucy, no seu segundo movimento, escreve o outro dígito não usado por Anna. No seu segundo movimento, Anna tem de formar um número divisível por 4. Se ela escolhe 8, Lucy, no seu terceiro movimento escreve 0, e Anna perde pois não há mais dígitos pares. Neste caso, o número formado foi 64280, satisfazendo ao problema.
Se no seu terceiro movimento Anna escreve 0, então Lucy escreve 5, provocando a derrota à Anna, pois ela tem de escrever um dígito par e só restou 8. Mas, o número 642.058 não é divisível por 6.

Caso 2 – Se no seu segundo movimento Anna escreve 0, então Lucy escreve 9. Neste caso, Anna tem de escrever 2 para formar um número de quatro dígitos divisível por 4. Lucy, no seu movimento seguinte

escreve 5. Anna se vê obrigada a escrever 8 para poder formar um número de 6 dígitos divisível por 6. Lucy escreve agora 3, porque o número 6.092.583 é divisível por 7. O único dígito par que sobra para Anna é 4, mas 60925834 não é divisível por 8, ela perde.

Caso 3 – Se no seu segundo movimento Anna escreve 8, então Lucy escreve 4. Na sua próxima jogada, Anna só pode escrever 0. Neste caso, Lucy escrever 5, o que resta para Anna somente 2. Mas, 684052 não é divisível por 6. Anna perde.

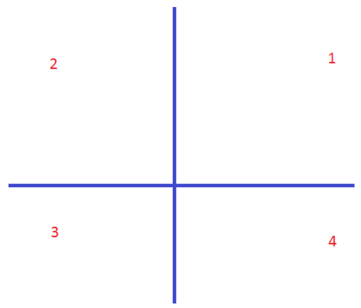
Observação: Se Lucy começa com 4, ela também vence, seguindo o mesmo raciocínio anterior.

Nível III (Alunos do Ensino Médio)

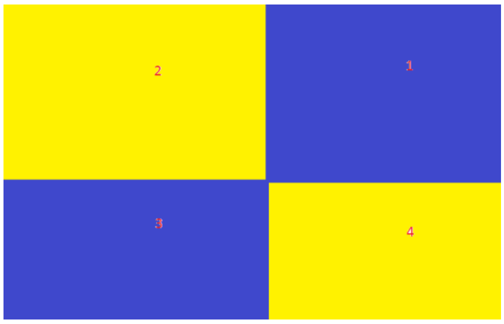
3.15. É possível pintar o plano com três cores, azul, amarela e vermelha, usando todas elas, de modo que toda reta do plano fique pintada com exatamente duas dessas cores?

Solução

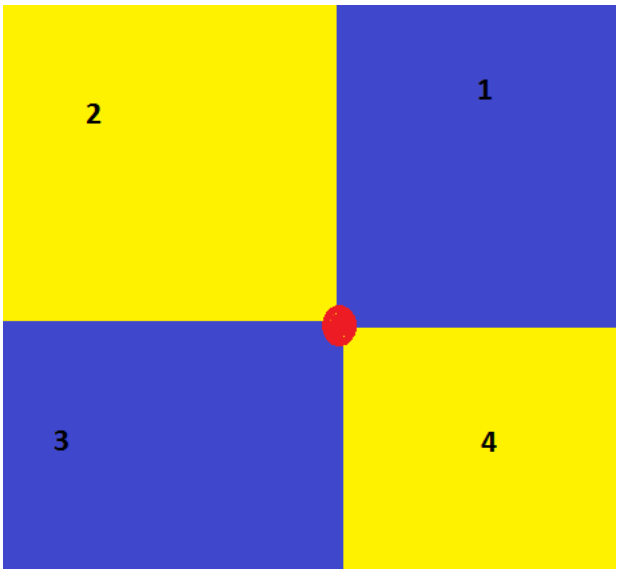
Sim.
Desenhe duas retas perpendiculares azuis.



Essas retas dividem o plano em 4 partes, numeradas no sentido contrário dos ponteiros do relógio como 1, 2, 3 e 4. Pinte de azul o interior das partes 1 e 3, e pinte o interior das partes 2 e 4 de amarelo.



Agora, pinte o ponto de interseção das duas retas azuis de vermelho.



Com esta pintura, toda reta do plano está pintada com exatamente duas cores.