Solução dos
Problemas Semanais
Data: 11/06/2012

Olimpíada Brasileira de Matemática

Competição Matemática do Rio Grande do Norte

UFRN EXTENSÃO

Nível I (Alunos do 6o. e 7o. anos do Ensino Fundamental)

1.16. Um professor de Matemática **e**screve no quadro-negro os 97 números da forma 49/*k*, com *k* =1, 2, 3, ...97, e propõe para um aluno que ele escolha dois dos números escrito, digamos *a* e *b*, e substitua-os por $2ab-a-b+1$. Depois que o aluno faz 97 vezes esse procedimento, vai restar um único número, M, no quadro-negro.

Determine todos os possíveis valores de M.

Solução

O único valor possível é o número 1.

Observe que $(2a-1)(2b-1)=2(2ab-a-b+1)-1$. Logo, o produto dos números da forma 2*m* - 1, quando *m* percorre todos os números da forma 49/*k*, com 1, 2, 3, ..., 97, é um número dessa mesma forma. Então o número final obtido, N, depois que o aluno faz 97 vezes o procedimento satisfaz a seguinte igualdade: $2N-1=(2.49/1-1).(2.49/2-1).(2.49/3-1)...(2.49/97-1)=(97/1).(96/2).(95/3)...(1/97)=1$.

Portanto, $2N-1=1 \Rightarrow N=1$.

Nível II (Alunos do 8o. e 9o. anos do Ensino Fundamental)

2.16. Num hexágono regular, Joãozinho escreve um número em cada lado e um número em cada vértice, de modo que o cada número num vértice seja igual a soma dos dois números dos lados vizinhos. Por descuido, ele apagou todos os números nos lados e o número em um vértice.

Joãozinho conseguirá recuperar o número que foi apagado do vértice?

Solução

Sim.

Pense nos números escritos antes de serem apagados. Pinte os números escritos nos vértices alternadamente de vermelhos e azuis. Assim, a soma dos números azuis e a soma dos números vermelhos são iguais à soma dos números escritos nos lados do hexágono e, portanto, são iguais. Deste modo, depois de apagado, um número vermelho ou um número azul pode ser recuperado, pois a soma dos números azuis é igual à soma dos números vermelhos.

Nível III (Alunos do Ensino Médio)

3.16. Um estudante escolhe 2012 pontos dentro de um cubo de aresta 9. Prove que, não importa qual seja a escolha do estudante, existem dois deles cuja distância seja menor do que 1.

Solução

Inicialmente, observe que, aplicando o Princípio da Casa dos Pombos, não se consegue resolver o problema. De fato, dividindo cada lado do cubo em 12 segmentos congruentes (esse número 12 é o maior inteiro menor do que ou igual a $\sqrt[3]{2012}$), obtemos $12^3 = 728$ cubos menores de arestas medindo $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. Em tais cubos existem dois pontos, dentre os 2012 pontos escolhidos pelo estudante, tais que a distância entre eles seja menor do que $\frac{3}{4}\sqrt{3}$, que não é suficiente, pois $\frac{3}{4}\sqrt{3} > 1$.

Voltemos ao problema. Vamos raciocinar por contradição. Isto é, vamos assumir que a distância entre quaisquer dois dos 2012 pontos escolhidos pelo estudante seja maior do que ou igual a 1. Desse modo, as esferas de raio ½ e centro nos 2012 pontos possuem interiores disjuntos e estão incluídas no cubo de lado 10 determinado por seis planos paralelos às faces do cubo dado e situados no exterior a uma distância de ½. Logo, segue que a soma dos volumes dessas 2012 esferas é menor do que o volume do cubo de lado 10. Portanto, $2012.\frac{4\pi.\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} = 2012.\frac{\pi}{6} \simeq 1053{,}48 > 1000$. Contradição.