Solução dos
Problemas Semanais
Data: 18/06/2012

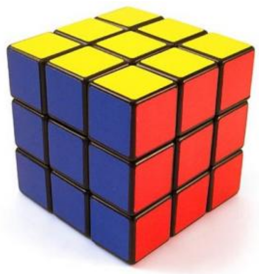
Olimpíada Brasileira de Matemática

Competição Matemática do Rio Grande do Norte

UFRN EXTENSÃO

Nível I (Alunos do 6o. e 7o. anos do Ensino Fundamental)

1.17. Seja ***n*** um número natural. Um cubo de aresta medindo ***n*** pode ser dividido em 1996 cubos cujas arestas são também números naturais. Na figura a seguir, temos um cubo de aresta 3, dividido em 27 cubos com aresta medindo 1 (no problema, não pedimos que os cubos menores tenham arestas de mesmo comprimento!!!).



Determinar o menor valor possível para n.

Solução

A resposta é $n = 13$.

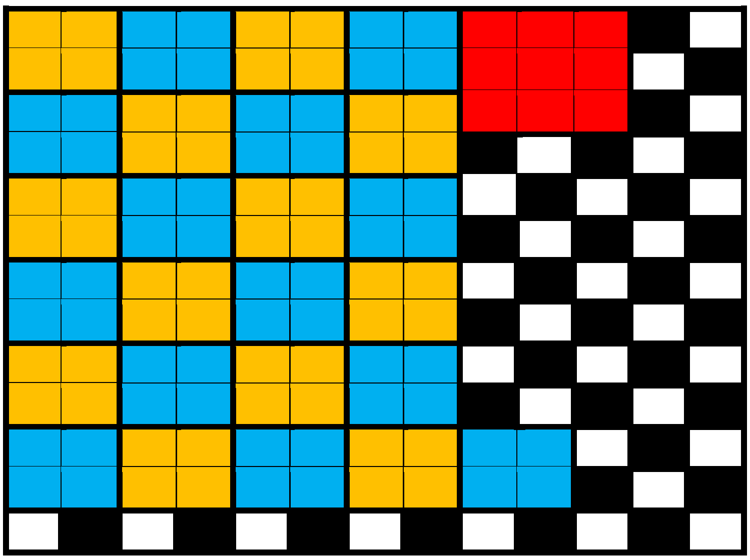
Inicialmente, observe que, como o número total de cubos é 1996 e que $12^3 = 1728 < 1996$, temos necessariamente $n \geq 13$, pois, com aresta 12, arrumando os cubos de menor aresta (igual a 1) o número deles seria insuficiente para atingir o volume 1996.

Vamos mostrar que podemos atingir o mínimo $n = 13$.

Poderíamos formar um cubo de aresta 13 usando um cubo de aresta 3, 25 cubos de aresta 2 e 1996 – (1 + 25) = 1970 cubos de aresta 1. Assim, o volume do cubo de aresta 13 é dado por:

$13^3 = 1 . 3^3 + 25 . 2^3 + 1970 . 1^3 = 2197.$

Na figura a seguir, temos uma visão (lateral) de uma face do cubo, mostrando a arrumação dos cubos menores para formar o cubo maior de aresta 13.



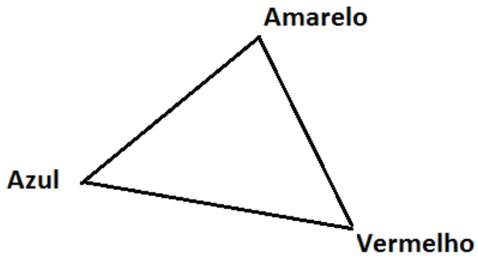
Nível II (Alunos do 8o. e 9o. anos do Ensino Fundamental)

2.17. Imagine que você possa pintar cada ponto do plano cartesiano com uma das três cores: vermelho, amarelo ou azul.

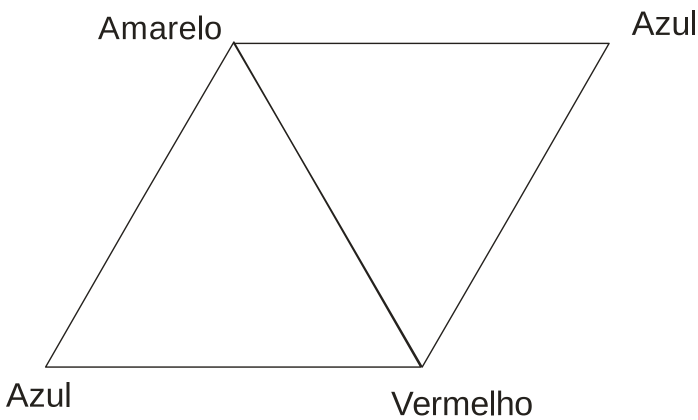
Depois de qualquer uma dessas pinturas, explique porque você pode concluir que sempre existe um segmento de comprimento 1 cujos extremos tem a mesma cor.

Solução

Desenhe um triângulo equilátero de lado 1 medindo 1. Suponha que no triângulo não tenha dois vértices de mesma cor. Ou seja, suponha que os vértices sejam pintados com cores distintas, veja figura a seguir.



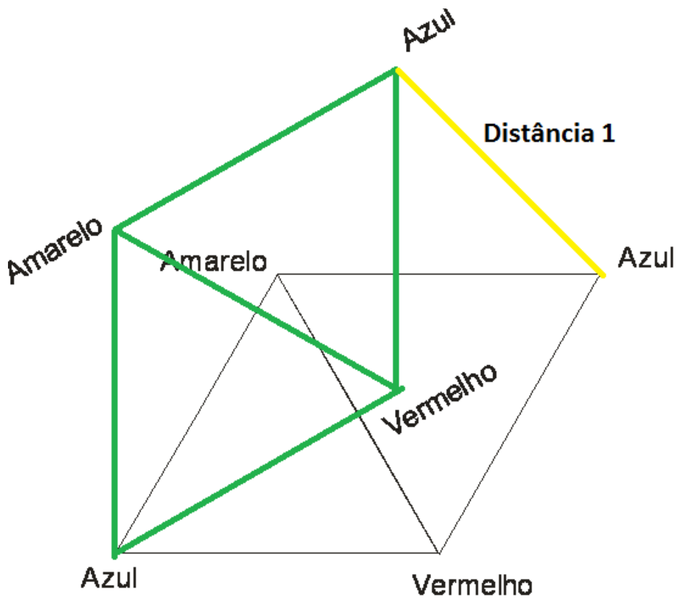
Agora, desenhe outro triângulo equilátero de lado 1 tendo por base o lado cujos extremos tem as cores vermelho e amarelo, respectivamente, veja figura a seguir.



Temos duas possibilidades:

(i)Se o outro vértice pintado de azul ou amarelo então temos um segmento de comprimento 1 cujos extremos tem a mesma cor.

(ii) Se o outro vértice for pintado de azul. Neste caso, gire a figura obtida (os dois triângulos juntos), em torno do vértice azul mais à esquerda, de um ângulo θ, de modo que o outro vértice azul se mova de uma distância 1, veja figura a seguir, onde a figura original, depois de girada, está pintada de verde.



Se na rotação da figura um dos vértices do triângulo original (agora verde) cair sobre um ponto azul, teremos um segmento de comprimento 1 com extremos de mesma cor (azul). Se na rotação da figura os vértices do triângulo original continuarem nas cores antigas (vermelho ou amarelo), então o vértice superior (no desenho verde) tem de ser necessariamente azul e está distanciado de 1 de outro ponto azul, o que conclui o problema.

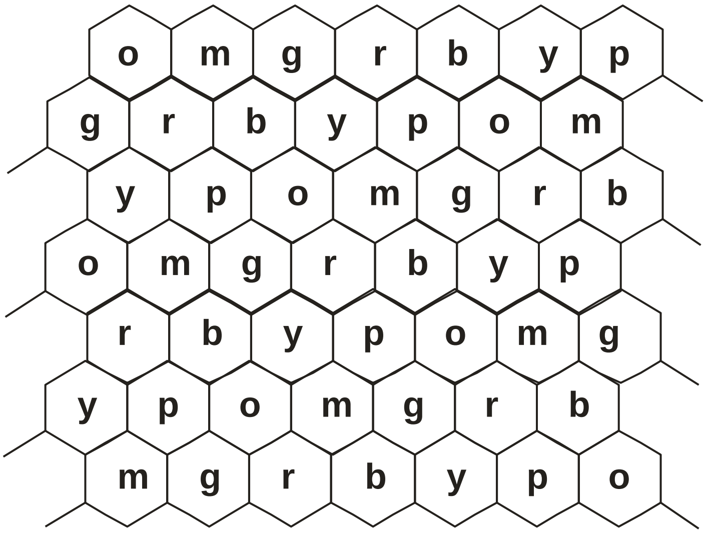
Nível III (Alunos do Ensino Médio)

3.17. Imagine que você possa pintar cada ponto do plano cartesiano com uma das 7 cores: amarelo, azul, vermelho, verde, laranja, violeta ou marrom.
Explique se é possível fazer uma pintura de modo que nenhum segmento de comprimento 1 tenha os extremos de mesma cor.
Solução

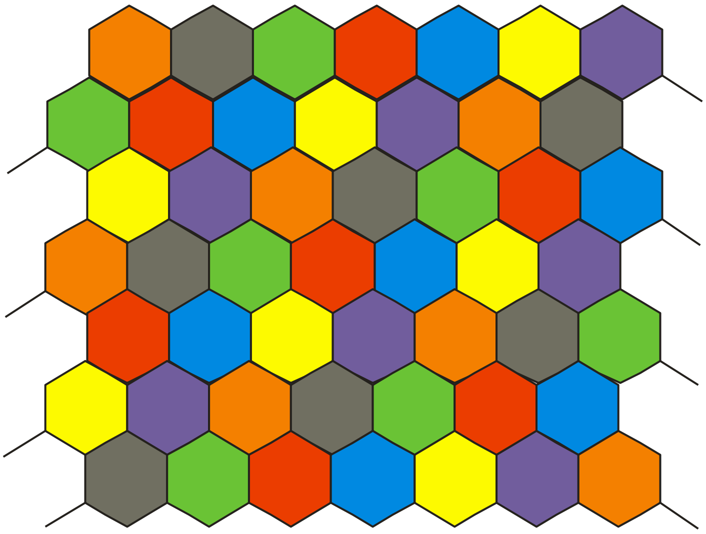
É possível.

Vamos notar cada cor por uma letra, da seguinte maneira:
Amarelo – **y**; Azul – **b**; Vermelho – **r**; Verde – **g**; Laranja – **o**; Violeta – **p** e Marron – **m**.

Agora, vamos pintar o plano da maneira seguinte.
Desenha-se ao longo do plano (como se fosse ladrilhos) hexágonos regulares congruentes, de lado ½, de modo que a distância entre dois vértices diametralmente opostos seja 1, veja figura a seguir (cada hexágono pode ser inscrito num círculo de raio ½).



A região limitada por cada hexágono será pintada com a cor cuja letra aparece nela. Com essa cor também pintamos a metade da fronteira do hexágono que está à esquerda, incluindo o vértice acima e excluindo o vértice abaixo (que fica pintado com a cor do hexágono que está abaixo à sua direita, juntamente com a parte da fronteira que está à direita). Veja, na figura a seguir, como ficaria a pintura do plano.



Desse modo, a distância entre dois hexágonos de mesma cor é sempre maior do que 1. Isso implica que, pintando o plano desta maneira, nenhum segmento de comprimento 1 tem os extremos de mesma cor.