Solução dos Problemas Semanais Nº 18
Data: 25/06/2012

Nível I (Alunos do 6o. e 7o. anos do Ensino Fundamental)

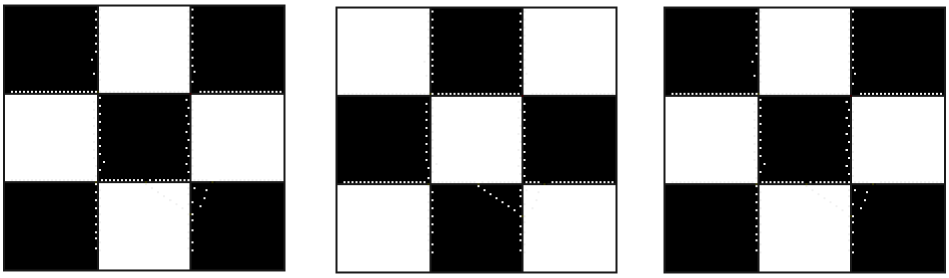
1.18. Colocam-se 27 cubinhos de madeira iguais, com aresta medindo 1 cm, para montar um cubo maior. Um cupim parte do centro de um cubinho, colocado no centro de uma das faces do cubo maior. Comendo a madeira, o cupim liga, sempre por linhas retas, o centro de um cubinho ao centro de outro cubinho com face adjacente ao anterior.

Desta forma, existe um caminho que passe exatamente uma vez por cada um dos cubinhos e termine no centro do cubo maior?

Solução

Não.

Formando o cubo maior de aresta 3, existem três níveis de cubinhos (superior, do meio e o nível inferior), todos com arestas 1. Em cada nível existem 9 cubinhos. Pinte os cubinhos alternadamente de branco e preto. Veja na figura a seguir uma pintura possível por cada nível.



Nível 1 (Superior) **Nível 2 (Do meio)** **Nível Inferior (Embaixo)**

O cupim parte do cubinho central, de cor branca, e passa para um cubinho preto, depois para um branco, em seguida para um cubinho preto etc. Ou seja, em termos de cores, o caminho que o cupim percorre é a sequência

branco $\rightarrow$ preto $\rightarrow$ branco $\rightarrow$ preto $\rightarrow$ branco $\rightarrow$.......

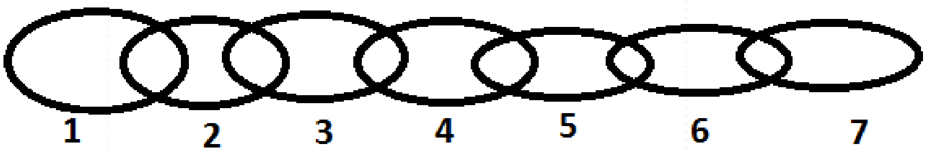
Se existisse um caminho passando exatamente uma vez por cada um dos cubinhos e terminando no centro do cubo maior, o cupim teria visitado 27 cubinhos, sendo 14 brancos e 13 pretos. Isto é uma contradição com o fato de que realmente o cubo maior tem 14 cubinhos pretos e 13 brancos. Portanto, não existe o caminho pretendido.

Nível II (Alunos do 8o. e 9o. anos do Ensino Fundamental)

2.18. Um viajante chega a um hotel de luxo sem dinheiro, mas com uma corrente de ouro formada por sete elos. O viajante acertou com o gerente do hotel que pagaria pela diária um elo da corrente, sem atrasar ou adiantar o pagamento, durante os sete dias. Como o viajante não sabia quanto tempo ia ficar decidiu pagar a despesa diariamente, cortando a corrente no menor número de pedaços.
Quantos elos no mínimo teria que abrir para pagar o hotel diariamente?
Solução

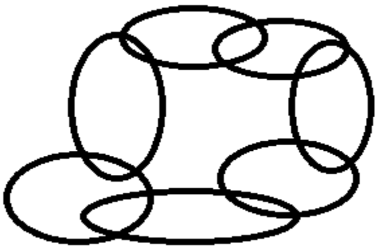
Há duas hipóteses:
(i) A corrente é aberta.
(ii) A corrente é fechada

Vamos estudar a alternativa (i).
Numere os sete elos da corrente em ordem crescente de 1 até 7, veja figura a seguir. Agora, observe que se abrirmos os elos



de números 2, 4 e 6, todos os elos estarão abertos. Portanto, neste caso, basta o viajante abrir 3 elos.

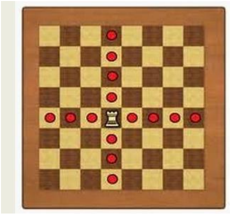
(ii) Se a corrente está fechada, veja figura a seguir..



Inicialmente o viajante abriria um dos elos, tornando a corrente aberta, e este elo aberto poderia ser retirado da corrente. Ou seja, agora teríamos uma corrente aberta com seis elos. Usando o raciocínio anterior, ele numera os elos da corrente em ordem crescente de 1 até de 6. Agora, basta o viajante abri os elos de números 2, 4 e 5 ou 2, 4 e 6, tornando todos os elos livres. Portanto, neste caso, basta o viajante abrir 4 elos.

Nível III (Alunos do Ensino Médio)

3.18. Numeram-se os quadrados unitário de um tabuleiro de xadrez (8 por 8) com os números de 1 até 64, sendo um número por quadrado: a primeira fila com os números de 1 até 8, em ordem crescente, da esquerda para a direita; a segunda fila com os números de 9 até 16, em ordem crescente, da esquerda para a direita; e assim por diante. Colocam-se no tabuleiro 8 torres, de tal modo que nenhuma possa capturar outra.
Que valor pode assumir a soma dos números dos quadrados unitários nos quais estão colocadas as torres?

(A torre, peça do jogo de xadrez, se move em linha reta, tanto na horizontal quanto na vertical, contanto que não haja outra peça no caminho) 

Solução

A numeração dos quadrados unitários do tabuleiro é feita como na figura a seguir.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Observe que o número colocado no quadrado unitário posicionado na i-ésima linha e j-ésima coluna pode ser expresso como: $\mathbf{i+8(j-1)}$, com **i, j** = 1, 2, 3, ...8. Por outro lado, como nenhuma das 8 torres pode capturar outra, então existe uma só torre por cada linha ou cada coluna. Isto significa que a soma pedida é igual a:

$$\sum_{i=1}^{8} i + \sum_{j=1}^{8} 8(j-1) = (1+2+3+4+5+6+7+8) + 8(0+1+2+3+4+5+6+7) = 36 + 8.28 = 260\,.$$

Observe ainda que, o número 260 encontrado não depende da maneira que se arruma as 8 torres que não se atacam. É surprendente!