Solução dos
Problemas Semanais
Data: 09/07/2012

Olimpíada Brasileira de Matemática

Nível I (Alunos do 6o. e 7o. anos do Ensino Fundamental)

1.19. Encontre 20 inteiros positivos tais que cada um deles é um divisor da soma de todos os outros.

Solução

Observe que: 1 + 2 +3 = 6 e cada um dos números 1, 2 e 3 é um divisor da soma de todos os outros (1 divide 2 +3; 2 divide 1 + 3 e 3 divide 1 + 2).
Agora, acrescente ao conjunto {1, 2, 3} a soma de seus elementos: 6.
O conjunto {1, 2, 3, 6} tem a propriedade de que cada um deles é um divisor da soma de todos os outros.
Observando que 1 + 2 + 3 + 6 = 12, podemos concluir que o conjunto {1, 2, 3, 6, 12} tem a propriedade desejada. Agora, basta continuar acrescentando ao próximo conjunto a soma dos elementos do conjunto imediatamente anterior.
A resposta será o conjunto {1, 2, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536, 2072, 4144, 8288, 16576, 33152, 66304, 132608, 265216}.

Observação: É possível encontrar qualquer quantidade de inteiros positivos tais que cada um deles é um divisor da soma de todos os outros. De fato, suponha que os números $a_1, a_2, ..., a_k$ satisfazem a propriedade de que cada um deles é um divisor da soma de todos os outros. É fácil ver que $S_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k$ é divisível por cada um dos números $a_1, a_2, ..., a_k$. Agora, considere o conjunto $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_k, S_k\}$. Não é difícil verificar que, para qualquer índice *i*, a soma de todos os números do conjunto $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_k, S_k\}$ excetuando o elemento a_i é igual a $2S_k - a_i$. Este número, pelas hipóteses, é divisível por a_i (pois a_i divide S_k e a_i divide a_i). Isto significa que o conjunto $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_k, S_k\}$ satisfaz a propriedade desejada. Tomando $a_{k+1} = S_k$ teremos um conjunto com $k+1$ elementos satisfazendo a propriedade.

Nível II (Alunos do 8o. e 9o. anos do Ensino Fundamental)

2.19. Na sala de aula de Pedro existem 25 alunos, sem contar com ele. Pedro observou que todos os 25 possuem um número diferente de amigos na sala.
Quantos amigos tem o Pedro na sala? Dê todas as possíveis respostas.

Solução

Existem duas hipóteses a considerar:
(i) . Na sala de aula tem um aluno com 0 amigos.
(ii) Na sala de aula não tem aluno com 0 amigos

Inicialmente, vamos resolver o problema com a hipótese (i).

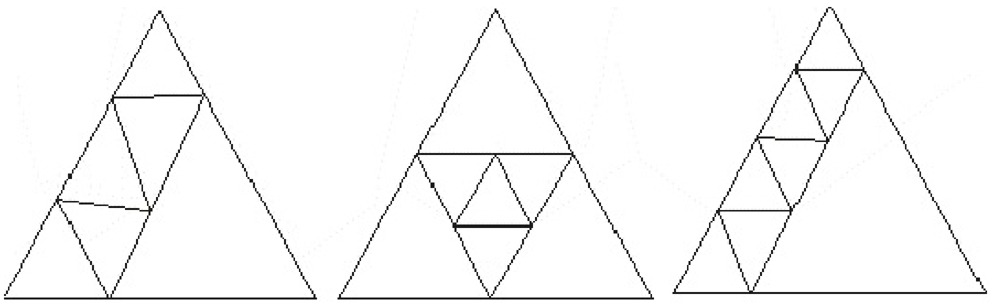
Vamos imaginar que, na sala de aula, tenha um aluno com 0 amigos. Assim, o mais alto número de amigos que um aluno da classe pode ter é 24. Como na sala de aula existem 25 alunos, sem contar com Pedro, e que todos eles possuem um número diferente de amigos na sala, então os números de amigos são os números 0, 1, 2, 3,....,, 24, respectivamente. Agora, divida os alunos da sala em dois conjuntos: A e B, onde A é o conjunto dos alunos que tem um número de amigos menor do que ou igual a 12 e B é a coleção dos alunos que tem 13 ou mais.
Nessa divisão, estamos deixando de fora Pedro. O número total de amigos que os alunos do conjunto A tem é igual a $0 + 1 + 2 + 3 + ... + 12 = 78$ e o número de amigos que os alunos do conjunto B tem é igual a
$13 + 14 + 15 + ... + 24 = 222$. Observe que o número máximo de amigos que um aluno do conjunto B tem nesse mesmo conjunto é $12 \times 11 = 132$. Este número mais 78 é ainda menor do que 222 (faltam 12). Logo, para que os alunos do conjunto B tenham a quantidade requerida de amigos, todos eles tem de ser amigos de Pedro. Por outro lado, todos os amigos dos alunos do conjunto A tem que pertencer ao conjunto B, o que implica que nenhum aluno do conjunto A é amigo de Pedro. Portanto, Pedro tem exatamente 12 amigos.

Agora vamos analisar o caso da hipótese (ii).
Neste caso, o número de amigos dos alunos, excluindo Pedro, é 1, 2, 3, ...25, respectivamente. Como na hipótese anterior, formemos os conjuntos A e B, sem a participação de Pedro. Fazendo os cálculos do número total de amigos, temos $1 + 2 + 3 + ... + 12 = 78$ e $13 + 14 + ... + 25 = 247$. De modo análogo ao caso anterior, o número máximo de amigos que um aluno do conjunto B tem nesse mesmo conjunto é igual a $13 \times 12 = 156$ e $247 – 156 – 78 = 13$. Portanto, de modo análogo, Pedro tem 13 amigos na sala de aula.

Nível III (Alunos do Ensino Médio)

3.19. Prove que qualquer triângulo equilátero desenhado numa folha de papel pode ser cortado em 2012 triângulos equiláteros, não necessariamente congruentes.
Solução

Nas figuras abaixo desenhamos o mesmo triângulo equilátero dividido em 6, 7 e 8 triângulos equiláteros, não necessariamente congruentes.



A partir da figura acima, podemos dividir um triângulo equilátero em 9, 10, e 11 triângulos equiláteros não necessariamente congruentes, fazendo em cada uma das figuras o número de triângulos crescer de 3. Isto pode ser feito cortando ao longo de segmentos de retas que juntam os pontos médios dos lados de um triângulo. Assim, podemos dividir um triângulo equilátero em 12, 13 e 14 triângulos equiláteros, não necessariamente congruentes. Prosseguindo desta maneira, pode-se fazer isso tantas vezes quanto quiser para atingirmos o número de 2012 triângulos.