Solução dos
Problemas Semanais
Data: 09/07/2012

Olimpíada Brasileira de Matemática

Competição Matemática do Rio Grande do Norte

UFRN EXTENSÃO

Nível I (Alunos do 6o. e 7o. anos do Ensino Fundamental)

1.20. Existem 390 moedas de ouro distribuídas em 30 cofres: 13 moedas em cada cofre. Cada moeda pesa um número inteiro de gramas, maior do que ou igual a 1 e menor do que ou igual a 30 e existem 13 moedas de cada peso. Sabe-se que se duas moedas estão no mesmo cofre, a diferença entre seus pesos é menor do que ou igual a 4 gramas.
Determinar qual é o mínimo valor possível do peso contido no cofre mais pesado.
(Livro: Olimpíada de Matemática Argentina - Problema 17, pag14)
Solução

A ideia do problema é fazer a distribuição das moedas mais pesadas em 1 cofre ou 2 cofres ou 3 cofres etc.
Se as 13 moedas mais pesadas, aquelas de 30 gramas, estão no mesmo cofre, então este cofre pesa um total de 30 . 13 = 390 gramas.

Se as moedas pesando 30 gramas estão distribuídas em dois cofres, há um deles com pelo menos 7 dessas moedas. As outras 6 moedas desse cofre pesam pelo menos 26 gramas cada uma, pois se duas moedas estão no mesmo cofre, a diferença entre seus pesos é menor do que ou igual a 4 gramas. Logo, o peso do cofre é maior do que ou igual a 7 . 30 + 6 . 26 = 366.

Se as moedas de 30 gramas estão distribuídas em 3 cofres, as outras 26 desses três cofres são de pesos maiores do que ou iguais a 26 gramas. Então a soma dos pesos dos 3 cofres é maior do que ou igual a 13 . 30 + 31. 26 = 1079, e o cofre de maior peso pesa pelo menos $\frac{1079}{3} \cong 359,66$ gramas. Como os pesos são números inteiros, o peso mínimo é 360 gramas.

Se as moedas de 30 gramas estão distribuídas em 4 cofres, as outras 39 moedas desses cofres são de pesos maiores do que ou iguais a 26 gramas. Logo, a soma dos pesos dos 4 cofres é maior do que ou igual a
13 . 30 + 13 . 26 + 13. 27 + 13 . 28 = 1443 gramas. Logo, existe um desses cofres que pesa $\frac{1443}{4} \cong 360,75$ gramas. Como os pesos são números inteiros, o mínimo desse cofre é 361 gramas.

Se as moedas de 30 gramas estão distribuídas em 5 cofres, as outras 52 moedas desses cofres pesam 26 gramas, 27 gramas, 28 gramas e 29 gramas, distribuídas nos 5 cofres. Logo, a soma dos pesos desses 5 cofres é é maior do que ou igual a 13 . 30 + 13 . 26 + 13 . 27 + 13 . 28 + 13 . 29 = 1820 gramas. Assim, existe um cofres que pesa pelo menos $\frac{1820}{5} = 364$ gramas.

É impossível que haja 6 ou mais cofres com moedas de 30 gramas, pois, neste caso, não se pode distribuir 390 moedas sem violar a condição de que em cada cofre não existem moedas cujos pesos diferem por no máximo 4.

Da análise acima, concluímos que o peso mínimo possível do cofre mais pesado é 360 gramas.
No quadro a seguir, há uma possível distribuição dos pesos das moedas por cofre, onde o mais pesado pesa 360 gramas.

Cofre 1	**Cofre 2**	**Cofre 3**	**Cofre 4**	**Cofre 5**	**Cofre 6**	**Cofre 7**	**Cofre 8**	**Cofre 9**	**Cofre ....**	**Cofre 30**
30	30	30	29	29	28	28	23	22	....	1
30	30	30	29	29	28	28	23	22	....	1
30	30	30	29	29	28	28	23	22	....	1
30	30	27	29	29	28	28	23	22	....	1
30	30	27	29	29	28	28	23	22	....	1
26	26	27	29	29	28	28	23	22	....	1
26	26	27	29	25	28	24	23	22	....	1
26	26	27	25	25	24	24	23	22	....	1
26	26	27	25	25	24	24	23	22	....	1
26	26	27	25	25	24	24	23	22	....	1
26	26	27	25	25	24	24	23	22	....	1
27	27	27	25	25	24	24	23	22	....	1
27	27	26	25	25	24	24	23	22	....	1

Nível II (Alunos do 8o. e 9o. anos do Ensino Fundamental)

2.20. Gabriela escreve a seguinte lista de números: o primeiro é 25 e, em seguida, cada um dos que se seguem é a soma dos quadrados dos dígitos do número imediatamente anterior. Os primeiros três números da lista são 25, 29 e 85, porque $29 = 2^2 + 5^2$ e $85 = 2^2 + 9^2$.
Encontrar o número que aparece na posição 2012 na lista de Gabriela.
(Livro: Olimpíada de Matemática Argentina - Problema 17, pag18)
Solução

Os primeiros números da lista são:

25, 29, 85, 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89, 145, ...

Observe que, nessa lista, depois dos três primeiros, os números se repetem em ciclos compostos de 8 números: 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58. Até a posição 2012, temos os três primeiros mais 2009 números. Ou seja, $2012 = 3 + 2009 = 3 + 8 . 25 + 1$. Portanto, o número na posição 2012 é primeiro do ciclo de repetição: 89.

Nível III (Alunos do Ensino Médio)

3.20. Diremos que um número inteiro positivo é ***ganhador*** se ele pode ser escrito como soma de um quadrado perfeito mais um cubo perfeito. Por exemplo, 33 é *ganhador* porque $33 = 5^2 + 2^3$.

Gabriel escolhe dois inteiros, r e s, e Germán deve encontrar 2005 inteiros positivos n tais que, para cada n, os números $r+n$ e $s+n$ sejam *ganhadores*.
Demonstrar que, qualquer que sejam os números r e s, escolhidos por Gabriel, Germán sempre vai alcançar seu objetivo.
Livro: Olimpíada de Matemática Argentina - Problema 17, pag34)

Solução

Observe que, dados dois números naturais r e s, existem infinitos números inteiros positivos n para os quais $r+n$ e $s+n$ sejam *ganhadores*. De fato, sem perda de generalidade, podemos supor que $r > s$.
Agora, vamos mostrar como gerar infinitos valores de n para os quais $r+n$ e $s+n$ sejam ganhadores.
Dados dois inteiros, r e s, considere números inteiros a, b, c tais que

$$r+n=a^3+c^3 \quad e \quad s+n=b^3+\left(c+1\right)^3$$

Diminuindo a membro as duas igualdades, obtemos: $r-s=a^3+c^2-b^3-(c+1)^2$, que é o mesmo que $a^3+c^2-r=b^3+\left(c+1\right)^2-s=b^3+c^2+2c+1-s \Rightarrow 2c+1=a^3-b^3-r+s+1$. Para que esta última equação tenha solução inteira positiva ou nula deveremos ter $c=\dfrac{a^3-b^3-r+s-1}{2}\in\mathbf{Z}$. Ou seja, o numerador da fração, $a^3-b^3-r+s-1$, tem de ser um número par maior do que ou igual a zero. Para isso, basta que $a^3-b^3>r-s$ e $a^3-b^3-(r-s)$ seja um número ímpar. Nestes casos, teríamos $n=a^3-r+c^2 \Rightarrow n+r=a^3+c^2$ e $s+n=b^3+\left(c+1\right)^2$. Assim, $r+n$ e $s+n$ sejam *ganhadores*. Como a poder escolhido arbitrariamente grande e $n=a^3-r+c^2\geq a^3-r$, pode-se construir infinitos números n. Portanto, Germán sempre vai alcançar seu objetivo.