Solução dos
Problemas Semanais
Data: 09/07/2012

Olimpíada Brasileira de Matemática

Competição Matemática do Rio Grande do Norte

UFRN EXTENSÃO

Nível I (Alunos do 6o. e 7o. anos do Ensino Fundamental)

1.21. Numa estação ferroviária vendem-se tantos bilhetes quantas são as estações. O bilhete da estação E_1 com destino a estação E_2 é considerado distinto do que leva da estação E_2 à estação E_1. Inaugura-se um novo trajeto, com várias estações, imprimindo-se 34 novos bilhetes de itinerários distintos.
Quantas estações existem no novo trajeto?
Solução

Sejam n o número inteiro de estações antes de inaugurar novas estações e x o número de estações do novo trajeto. O número de bilhetes no sistema antigo era dado por $n(n - 1)$, pois o bilhete da estação E_1 com destino a estação E_2 é considerado distinto do que leva da estação E_2 à estação E_1. Com a inauguração do novo trajeto, o número de bilhetes é dado por $(n + x)(n + x - 1)$.
Logo, temos que $(n + x)(n + x - 1) - n(n - 1) = 34$, que é o mesmo que $x^2 + (2n - 1)x - 34 = 0$, cujas soluções são da forma

$$x = \frac{-(2n-1) \pm \sqrt{(2n-1)^2 + 136}}{2} \Rightarrow (2n-1)^2 + 136 = \alpha^2, \ (\alpha \in \mathbb{N})$$

Como x é um número inteiro, temos que $n = 8$, o que implica que $\alpha = 19$ e, portanto, $x = 2$.
O número de estações no novo trajeto é 2.

Nível II (Alunos do 8o. e 9o. anos do Ensino Fundamental)

2.21. Numa rua, existem 100 casas em fila, numeradas de 1 até 100. Um pintor vem e pinta todas as casas de vermelho. Em seguida, vem um segundo pintor e pinta de azul as casas de três em três, começando da casa número 3. A seguir, vem um terceiro pintor e pinta de vermelho as casas de cinco em cinco, começando na casa de número 5 (ele pinta de vermelho, mesmo que a casa já seja vermelha). Em seguida, vem um quarto pintor e pinta de azul as casas de sete em sete, começando na casa 7. A seguir, vem um quinto pintor, e assim por diante, alternando a pintura vermelha, azul, até o pintor de número 50.
No final, quantas casas são vermelhas?
Solução

O número de casas vermelhas é 52.
Inicialmente, todas as casas são vermelhas (números múltiplos de 1), que é a primeira pintura feita. Depois, ficam vermelhas as casas múltiplas de 5, 9, 13, ..., 97 (números da forma 4k +1).
As casas azuis são aquelas de números, entre 1 e 100 (inclusive), múltiplos de: 3, 7, 11, 15, ..., 99 (números da forma 4k + 3)
A cor final de uma dada casa é precisamente a cor da última pintura que ela recebe e esta cor corresponde justamente ao maior divisor ímpar do número da casa.
Assim, as casas azuis são as de números:
(i) 3, 7, 11, 15, ..., 95, 97 (vinte e cinco);
(ii) 6, 14, 22, 30, ..., 86, 94 (doze);
(iii) 12, 18, 44, 60, 76, 92 (seis);
(iv) 24, 56, 88 (três);

(v) 48 (um)
(vi) 96 (um).
Logo, o número de casas azuis é 25 + 12 + 6 + 3 + 1 + 1 = 48.
Portanto, o número de casas vermelhas é igual a 100 - 48 = 52.

Nível III (Alunos do Ensino Médio)

3.21. Um jogo da categoria paciência geralmente envolve a manipulação de um layout de cartões, cartas ou bolas com o objetivo de classificá-los de alguma maneira.
Uma paciência é jogada numa mesa com 10 caixas, numeradas de 1 até 10, e uma de reserva. No início do jogo, colocam-se bolas em algumas das 10 caixas, ficando a caixa reserva vazia. O objetivo do jogo é transferir todas as bolas para a caixa reserva. Uma jogada consiste em esvaziar uma caixa e distribuir todas as suas bolas pelas caixas restantes e pela caixa reserva observando as seguintes regras:

- A caixa *n* pode ser esvaziada se e só se contém *n* bolas.
- Quando a caixa *n* é esvaziada, uma bola é colocada na caixa reserva e as outras $n - 1$ bolas são distribuídas pelas caixas 1, 2, 3, ..., $(n - 1)$, colocando-se uma bola em cada uma destas caixas.

Determine o número máximo de bolas que permite o jogador ganhar o jogo.
(XVIII Olimpíada Portuguesa de Matemática - 2000)
Solução

O número máximo de bolas que permite o jogador ganhar o jogo é 41
Designemos por a_i o número de bolas inicialmente colocadas na caixa i. É evidente que $a_i \leq i$, para que possa ser possível retirar todas as bolas.
Designemos ainda por n_i o número de vezes que a caixa i é esvaziada. A caixa i recebe uma bola cada vez que as caixas i + 1, i + 2, . . . , 10 são esvaziadas, pois o número de bolas que ficariam nesta caixa, caso ela nunca fosse esvaziada, seria $a_i + (n_{i+1}) + (n_{i+2}) + \cdots + n_{10}$. Cada vez que a caixa i é esvaziada retiram-se i bolas, para que seja possível retirar completamente as bolas,
$a_i + (n_{i+1}) + (n_{i+2}) + \cdots + n_{10}$ deve que ser múltiplo de i e $n_i = [a_i + (n_{i+1}) + (n_{i+2}) + \cdots + n_{10}]/i$.
Observe que a caixa 1 pode ter ou não 1 bola, que isso não afeta a possibilidade de a retirar. Isto é, sempre que uma solução verifica $a_1 = 1$, existe outra com o mesmo número de bolas nas caixas 2 a 10 e $a_1 = 0$.
Como procuramos maximizar o número de bolas, apenas nos interessam as soluções em que $a_1 = 1$. Algumas soluções do sistema de equações descrito acima são:

Caixa	a_i	n_i	a_i	n_i	a_i	n_i	a_i	n_i	a_i	n_i	a_i	n_i
10	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1	0	0
9	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	9	1
8	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	7	1
7	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	5	1
6	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	3	1
5	0	1	5	2	5	2	5	2	5	2	1	1
4	2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	3	2
3	1	3	0	3	0	3	3	3	3	4	2	3
2	1	6	0	6	2	7	1	7	1	7	2	0
1	1	17	1	19	1	2	1	2	1	21	1	17
Total	**35**		**37**		**39**		**39**		**41**		**33**	

É evidente que não vale a pena procurar soluções que deixem as caixas 9 e 10 vazias, já que o número de bolas que se poderiam ganhar nas outras caixas é inferior ao número de bolas que se perdem ao deixar estas caixas vazias. Logo, o maior número de bolas que permite terminar o jogo é 41.