Solução dos Problemas Semanais
Data: 23/07/2012

Olimpíada Brasileira de Matemática

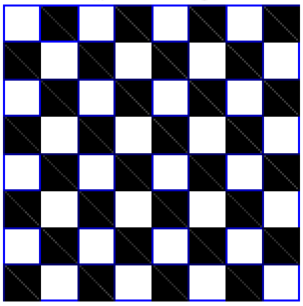
Nível I (Alunos do 6o. e 7o. anos do Ensino Fundamental)

1.22. Considere um tabuleiro de xadrez (8 x 8) com sua pintura normal, isto é, 32 quadrados brancos e 32 quadrados pretos, alternados. Você pode fazer o seguinte movimento: *numa linha ou coluna, você pode inverter a ordem da pintura dos quadrados; os que são brancos passam a ser pretos, e vice-versa.*

Fazendo vários desses movimentos, você pode chegar a uma situação onde o tabuleiro tenha, exatamente, um quadrado preto?

Solução

A idéia é pensar como varia o número de quadrados com cada movimento. Inicialmente, em cada linha ou coluna o número de quadrados preto é par e igual a 4 e o número de quadrados pretos no tabuleiro é 32, veja figura a seguir:



Depois de cada movimento, o número de peças pretas no tabuleiro muda sempre para um número par. Ou seja, a paridade do número de peças pretas é invariante.

De fato, se num dado momento existem exatamente k quadrados pretos numa linha ou coluna, depois de um movimento o número de quadrados pretos passa a ser (8 – k), uma mudança de

(8 – k) – k = 8 – 2k, que é um número par. Portanto, começando com 32 peças pretas, não pode aparecer um só quadrado preto no tabuleiro.

Nível II (Alunos do 8o. e 9o. anos do Ensino Fundamental)

2.22. Escolha 9 inteiros positivos distintos e pinte 4 deles de azul e os outros 5 de vermelho. Em seguida, forme todas as frações possíveis de um número azul sobre um número vermelho (são 20 frações). O objetivo é que entre essas frações haja a menor quantidade possível de números distintos.

Determine qual é essa quantidade mínima e dê um exemplo com uma possível escolha dos números a zuis e vermelhos.

Solução

Sejam $A_1 < A_2 < A_3 < A_4$ os números azuis e $V_1 < V_2 < V_3 < V_4 < V_5$ os números vermelhos. É fácil ver que: $\frac{A_1}{V_5} < \frac{A_1}{V_4} < \frac{A_1}{V_3} < \frac{A_1}{V_2} < \frac{A_1}{V_1} < \frac{A_2}{V_1} < \frac{A_3}{V_1} < \frac{A_4}{V_1}$.

Portanto, estas 8 frações são números distintos e entre as 8 frações teremos pelo menos 8 números distintos. Veremos agora que poderemos escolher quatro os números azuis e os cinco números vermelhos de modo que haja 8 frações distintas. Por exemplo, se

$A_1 = 1 < A_2 = 2 < A_3 = 4 < A_4 = 8$ e $V_1 = 3 < V_2 = 6 < V_3 = 12 < V_4 = 24 < V_5 = 48$

Obtemos as frações $\frac{A_i}{V_j}$ como na tabela a seguir.

A \ V	3	6	12	24	48
1	1/3	1/6	1/12	1/24	1/48
2	2/3	2/6	2/12	2/24	2/48
4	4/3	4/6	4/12	4/24	4/48
8	8/3	8/6	8/12	8/24	8/48

Nível III (Alunos do Ensino Médio)

3.22. Em cada quadrado unitário (com lados paralelos ao bordo) de um tabuleiro de xadrez (8 x 8) escreve-se um número inteiro não negativo de tal modo que se verificam as seguintes condições:

(a) Se dois dos quadrados unitários são simétricos em relação à uma diagonal do tabuleiro, então eles possuem o mesmo número escrito;

(b) A soma de todos os números do tabuleiro é 2004;

(c) A soma de todos os números dos quadrados unitários que compõem as diagonais é 204.

Determine o máximo valor que se pode obter como soma dos números em um fila do tabuleiro.

Solução

Inicialmente, observe que, se um número aparece em um quadrado unitário que compõe a diagonal, então ele aparece no mínimo duas vezes, pois ele aparece no quadrado unitário simétrico com relação à outra diagonal. Por outro lado, se um número aparece em um quadrado unitário que não está em qualquer uma das diagonais, então esse número se repete pelo menos outras três vezes, pois, pelas hipóteses do problema, deve aparecer nos quadrados unitários simétricos em relação às diagonais e também deve

aparecer nos quadrados simétricos desses quadrados unitários, o que implica que que aparece mais uma vez como simétrico com relação ao centro do tabuleiro.
É oportuno observar que estas repetições forçadas pelas condições de simetria nunca correspondem a um quadrado unitário que esteja na mesma fila. Então o maior número que pode figurar num quadrado unitário de uma diagonal é 204/2 = 102, e o maior número que pode aparecer em um quadrado unitário fora das diagonais é (2004 -204)/4 = 450. No exemplo a seguir, mostramos como podemos escrever os números nos quadrados do tabuleiro para obter uma fila com soma igual a 552 = 405 + 102.

102	450	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	450	102

Agora, vamos provar que o máximo valor que se pode obter como soma dos números em um fila do tabuleiro é 552.
Suponha que seja possível escrever numa fila os números a, b, c, d, e, f, g, h de modo que $a + b + c + d + e + f + g + h > 552$.
Das observações iniciais, podemos concluir que:

$$2004 > 2a + 2b + 4(c + d + e + f + g + h),$$

Pois 2004 é igual à soma dos 64 números no tabuleiro e $204 > 2a + 2b$, pois 204 é igual à soma dos 16 números das duas diagonais. Agora, como

$2a + 2b + 4(c + d + e + f + g + h) = 4(a + b + c + d + e + f + g + h) – (2a + 2b)$, teríamos

$2004 > 4(a + b + c + d + e + f + g + h) – (2a + 2b) > 4.552 – 204 = 2004$. Contradição.
Portanto, o máximo valor que se pode obter como soma dos números em um fila do tabuleiro é 552.